MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 13
30.01.2012

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Bearbeitungsvorschlag —

49. a) Wegen

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & s \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & s-2 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\text{II}}{\overset{\text{I}-2\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

gilt

$$\dim \operatorname{Bild}(f_s) = \operatorname{Rang}(A_s) = \begin{cases} 2, & \text{falls } s = 0, \\ 3, & \text{falls } s \neq 0. \end{cases}$$

Die lineare Abbildung $f_s : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ist genau dann surjektiv, wenn

$$\dim \operatorname{Bild}(f_s) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

gilt, damit also genau für $s \neq 0$. In diesen Fällen ist x_3 die einzige freie Unbestimmte des homogenen linearen Gleichungssystems $A_s \cdot x = 0$, so daß wir gemäß obiger Rechnung

$$\operatorname{Kern}(f_s) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten.

b) Für die Wahl $s = 0$ ergibt sich gemäß a) speziell

$$A_0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man:

- $\operatorname{Kern}(f_0) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f_0(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A_0 \cdot x = 0\}$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A_0 \cdot x = 0$ mit den freien Unbestimmten x_3 und x_4 überein; somit bilden

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis von $\operatorname{Kern}(f_0)$.

- $\mathrm{Bild}(f_0) = \{f_0(x) \mid x \in \mathbb{R}^4\} = \{A_0 \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^4\}$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix A_0 überein. Da x_1 und x_2 die gebundenen Unbestimmten von $A_0 \cdot x = 0$ sind, bilden

  $$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  eine Basis von $\mathrm{Bild}(f_0)$.

50. a) Es ist

$$(S|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\sim}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = (E_3|S')$$

Damit ist S invertierbar mit

$$S^{-1} = S' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Da die Matrix $S = (a_1, a_2, a_3)$ gemäß a) invertierbar ist, bilden ihre Spalten a_1, a_2, a_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$; nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung gibt es damit genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(a_1) = a_2, \quad f(a_2) = a_3 \quad \text{und} \quad f(a_3) = a_1;$$

für die gesuchte Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$A\,a_1 = f(a_1) = a_2, \quad A\,a_2 = f(a_2) = a_3 \quad \text{und} \quad A\,a_3 = f(a_3) = a_1,$$

also

$$A \cdot (a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_3, a_1)\,.$$

Mit $T = (a_2, a_3, a_1) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt also $A \cdot S = T$, und man erhält

$$A = T \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ läßt sich die Aufgabe auch ohne die Verwendung des Prinzips der linearen Fortsetzung wie folgt lösen: Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$f(a_1) = a_2, \quad f(a_2) = a_3 \quad \text{und} \quad f(a_3) = a_1;$$

für ihre Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$A\,a_1 = f(a_1) = a_2, \quad A\,a_2 = f(a_2) = a_3 \quad \text{und} \quad A\,a_3 = f(a_3) = a_1,$$

also

$$A \cdot (a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_3, a_1)\,,$$

und man erhält wie oben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist schon gezeigt, daß es höchstens eine lineare Abbildung mit den geforderten Eigenschaften gibt, nämlich ℓ_A; die Probe

$$\begin{aligned}
\ell_A(a_1) = A \cdot a_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_2, \\
\ell_A(a_2) = A \cdot a_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_3, \\
\ell_A(a_3) = A \cdot a_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1,
\end{aligned}$$

beweist nun, daß $f = \ell_A$ auch das Gewünschte leistet.

51. Für einen Vektorraum V mit $\dim(V) < \infty$ ist die Äquivalenz

$$\text{Es gibt ein } f : V \to V \text{ linear mit } \operatorname{Kern}(f) = \operatorname{Bild}(f) \iff \dim(V) \text{ gerade}$$

zu zeigen; für $\dim(V) = 0$ ist $V = \{0_V\}$, und für die Nullabbildung $f : V \to V$ gilt $\operatorname{Kern}(f) = \{0_V\} = \operatorname{Bild}(f)$. Sei daher im folgenden $\dim(V) \in \mathbb{N}$.

- Für „$\Longrightarrow$“ existiert also ein Endomorphismus $f : V \to V$ von V mit $\operatorname{Kern}(f) = \operatorname{Bild}(f)$, so daß sich schon die Beziehung

  $$\dim(\operatorname{Kern}(f)) = \dim(\operatorname{Bild}(f)) = n \qquad \text{für ein} \quad n \in \mathbb{N}$$

  und folglich mit Hilfe der Dimensionsformel

  $$\dim(V) = \dim(\operatorname{Kern}(f)) + \dim(\operatorname{Bild}(f)) = n + n = 2\,n$$

  ergibt; damit ist $\dim(V)$ gerade.
- Für „$\Longleftarrow$“ ist $\dim(V)$ gerade, also $\dim(V) = 2\,n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und wir wählen eine Basis $b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{2n}$ von V. Gemäß dem Prinzip der linearen Fortsetzung existiert nun eine lineare Abbildung $f : V \to V$ mit

  $$f(b_j) = \begin{cases} 0_V, & \text{für } j = \{1, \ldots, n\}, \\ b_{j-n}, & \text{für } j = \{n+1, \ldots, 2\,n\}. \end{cases}$$

  Damit erhalten wir zum einen

  $$b_1, \ldots, b_n \in \operatorname{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0_V\}\,,$$

also

$$\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \subseteq \mathrm{Kern}(f) \qquad \text{und damit} \quad n \leq \dim(\mathrm{Kern}(f)),$$

sowie zum anderen

$$b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{Bild}(f) = \{f(v) \mid v \in V\},$$

also

$$\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \subseteq \mathrm{Bild}(f) \qquad \text{und damit} \quad n \leq \dim(\mathrm{Bild}(f)),$$

woraus sich mit der Dimensionsformel

$$2\,n \leq \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(V) = 2\,n$$

und damit

$$\dim(\mathrm{Kern}(f)) = n = \dim(\mathrm{Bild}(f))$$

und folglich

$$\mathrm{Kern}(f) = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle = \mathrm{Bild}(f)$$

ergibt.

52. a) Wir zeigen mit Hilfe des Unterraumkriteriums, daß

$$f(U) = \{f(u) \mid u \in U\} \subseteq W$$

ein Unterraum von W ist:

- Wegen $0_V \in U$ gilt
$$0_W = f(0_V) \in f(U).$$
- Für alle w_1, $w_2 \in f(U)$ gibt es u_1, $u_2 \in U$ mit $f(u_1) = w_1$, $f(u_2) = w_2$, und wegen $u_1 + u_2 \in U$ ergibt sich
$$w_1 + w_2 = f(u_1) + f(u_2) \underset{f \text{ additiv}}{=} f(u_1 + u_2) \in f(U).$$
- Für alle $w \in f(U)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es $u \in U$ mit $f(u) = w$, und wegen $\lambda \cdot u \in U$ ergibt sich
$$\lambda \cdot w = \lambda \cdot f(u) \underset{f \text{ homogen}}{=} f(\lambda \cdot u) \in f(U).$$

b) Wir zeigen mit Hilfe des Unterraumkriteriums, daß

$$f^{-1}(X) = \{v \in V \mid f(v) \in X\}$$

ein Unterraum von V ist:

- Wegen $0_V \in V$ mit $f(0_V) = 0_W \in X$ gilt
$$0_V \in f^{-1}(X).$$

- Für alle $v_1,\ v_2 \in f^{-1}(X)$ gilt $f(v_1),\ f(v_2) \in X$, und wegen $v_1 + v_2 \in V$ mit
$$f(v_1 + v_2) \underset{f \text{ additiv}}{=} f(v_1) + f(v_2) \in X$$
ergibt sich $v_1 + v_2 \in f^{-1}(X)$.
- Für alle $v \in f^{-1}(X)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $f(v) \in X$, und wegen $\lambda \cdot v \in V$ mit
$$f(\lambda \cdot v) \underset{f \text{ homogen}}{=} \lambda \cdot f(v) \in X$$
ergibt sich $\lambda \cdot v \in f^{-1}(X)$.

c) Für „$\Longrightarrow$“ gilt zunächst $\mathrm{Bild}(f) \subseteq W$, und für „$\supseteq$“ sei $w \in W$; wegen der Surjektivität von f gibt es ein $v \in V$ mit $w = f(v) \in \mathrm{Bild}(f)$.

Für „$\Longleftarrow$“ sei $w \in W$, und wegen $\mathrm{Bild}(f) = W$ gibt es ein $v \in V$ mit $f(v) = w$; damit ist f surjektiv.

d) Für „$\Longrightarrow$“ gilt zunächst $\mathrm{Kern}(f) \supseteq \{0_V\}$, und für „$\subseteq$“ sei $v \in \mathrm{Kern}(f)$; damit gilt $f(v) = 0_W = f(0_V)$, und wegen der Injektivität von f folgt $v = 0_V$.

Für „$\Longleftarrow$“ seien $v_1,\ v_2 \in V$ mit $f(v_1) = f(v_2)$; mit der Linearität von f ergibt sich $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0_W$, also $v_1 - v_2 \in \mathrm{Kern}(f)$, und wegen $\mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$ folgt $v_1 - v_2 = 0_V$, also $v_1 = v_2$.