MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 12
23.01.2012

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Bearbeitungsvorschlag —

45. Wir betrachten für das durch die drei Parameter r, s, $t \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & 2\,x_4 & = & 4 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & r\,x_3 & & & = & 1 \\ s\,x_1 & & & + & x_3 & + & t\,x_4 & = & 1 \end{array}$$

die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right);$$

ist nun das Gleichungssystem lösbar, so gibt die Anzahl der freien Variablen die Dimension der Lösungsmenge an.

a) Wegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right) \overset{\text{II}+(-2)\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & r & -4 & -7 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right) \overset{\text{III}+(-s)\text{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & r & -4 & -7 \\ 0 & -2\,s & 1 & t-2\,s & 1-4\,s \end{array}\right) \overset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2\,s & 1 & t-2\,s & 1-4\,s \\ 0 & 0 & r & -4 & -7 \end{array}\right)$$

treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Fall 1: $s \neq 0$. Damit sind
  - im Falle $r \neq 0$ die Variablen x_1, x_2, x_3 gebunden sowie x_4 frei sowie
  - im Falle $r = 0$ die Variablen x_1, x_2, x_4 gebunden sowie x_3 frei;

  auf jeden Fall ist das Gleichungssystem lösbar und besitzt eine eindimensionale Lösungsmenge.

- Fall 2: $s = 0$. Wegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right) \overset{\text{s.o.}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & r & -4 & -7 \end{array}\right) \overset{\text{III}+(-r)\text{II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4-r\,t & -7-r \end{array}\right)$$

  sind auf jeden Fall x_1 und x_3 gebunden sowie x_2 frei, so daß das Gleichungssystem genau dann eine eindimensionale Lösungsmenge besitzt, wenn x_4 ebenfalls gebunden ist, also genau im Falle $-4 - r\,t \neq 0$ bzw. $r\,t \neq -4$.

b) Gemäß a) besitzt das Gleichungssystem für $s \neq 0$ oder $s = 0$ und $r\,t \neq -4$ eine eindimensionale Lösungsmenge; daher kommt eine zweidimensionale Lösungsmenge nur im Fall $s = 0$ und $r\,t = -4$ in Frage. Wegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right) \overset{\text{a)}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7-r \end{array}\right)$$

ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $-7 - r = 0$ gilt; damit muß $r = -7$ und wegen $r\,t = -4$ auch $t = \frac{4}{7}$ gelten. Für diese Wahl der Parameter ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

46. Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & \alpha & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^2 - 1 & 2 & 0 \\ -2\,\alpha & -\frac{3}{2}\,\alpha & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\frac{1}{2}\alpha\,\text{I}}{\overset{\text{II}-\frac{1}{4}\alpha^2\,\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\,\alpha^2 - 1 & 2 - \frac{1}{4}\,\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 + \frac{1}{2}\,\alpha^2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}\cdot 2}{\overset{\text{II}\cdot 4}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^2 - 4 & 8 - \alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 4 & 0 \end{array}\right)$$

treffen wir folgende Fallunterscheidung:

- Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ ist $\alpha^2 - 4 \neq 0$ und damit $\operatorname{Rang}(A) = 3$; folglich ist $\dim(U) = n - \operatorname{Rang}(A) = 3 - 3 = 0$.
- Für $\alpha = -2$ ist $(A|0) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit $\operatorname{Rang}(A) = 2$; folglich ist $\dim(U) = n - \operatorname{Rang}(A) = 3 - 2 = 1$.

- Für $\alpha = 2$ ist $(A|0) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit $\mathrm{Rang}(A) = 1$; folglich ist $\dim(U) = n - \mathrm{Rang}(A) = 3 - 1 = 2$.

47. a) Wir weisen die Linearität der Abbildung

$$\mathrm{Spur} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto a_{11} + \ldots + a_{nn}$$

anhand der Definition nach:

- Für alle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathrm{Spur}(A + B) &= (a_{11} + b_{11}) + \ldots + (a_{nn} + b_{nn}) = \\ &= (a_{11} + \ldots + a_{nn}) + (b_{11} + \ldots + b_{nn}) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B); \end{aligned}$$

folglich ist Spur zunächst additiv.

- Für alle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

gilt

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{n1} & \dots & \lambda \cdot a_{nn} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathrm{Spur}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot a_{11} + \ldots + \lambda \cdot a_{nn} = \lambda \cdot (a_{11} + \ldots + a_{nn}) = \lambda \cdot \mathrm{Spur}(A);$$

folglich ist Spur auch homogen.

b) Das k–te Diagonalelement der Matrix AB ist

$$a_{k1}b_{1k} + \ldots + a_{kn}b_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik}$$

und damit

$$\mathrm{Spur}(AB) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik};$$

entsprechend ist das l–te Diagonalelement der Matrix BA

$$b_{l1}a_{1l} + \ldots + b_{ln}a_{nl} = \sum_{j=1}^{n} b_{lj}a_{jl}$$

und damit

$$\mathrm{Spur}(BA) = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{lj}a_{jl}\right) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{lj}a_{jl} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{lj}.$$

Nach einer geeigneten Umindizierung ($j \leftrightarrow k$ und $i \leftrightarrow l$) erkennt man $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

c) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

- $ABC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit $\mathrm{Spur}(ABC) = 0$ sowie
- $BAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und damit $\mathrm{Spur}(BAC) = 1$.

d) Aus $A\,B - B\,A = \lambda\,E_n$ ergibt sich

$$n \cdot \lambda = \mathrm{Spur}(\lambda\,E_n) = \mathrm{Spur}(A\,B - B\,A) \underset{\text{a)}}{=} \mathrm{Spur}(A\,B) - \mathrm{Spur}(B\,A) \underset{\text{b)}}{=} 0,$$

wegen $n \neq 0$ also $\lambda = 0$.

48. a) Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = 0_V.$$

Aus dieser Beziehung erhalten wir mit der Abbildung $f : V \to W$ dann

$$f\left(\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n\right) = f\left(0_V\right),$$

und wegen der Linearität von f ergibt sich

$$\lambda_1 \cdot f(v_1) + \ldots + \lambda_n \cdot f(v_n) = 0_W.$$

Da die Vektoren $f(v_1), \ldots, f(v_n) \in W$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind, folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$; damit sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig.

b) Die Kontraposition zu a) lautet

$$v_1, \ldots, v_n \text{ linear abhängig} \implies f(v_1), \ldots, f(v_n) \text{ linear abhängig}$$

für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$. Da diese zur Aussage von a) logisch äquivalent ist, ist auch sie allgemeingültig.

c) Die Umkehrung von a)

$$v_1, \ldots, v_n \text{ linear unabhängig } \implies f(v_1), \ldots, f(v_n) \text{ linear unabhängig}$$

für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ ist unter der Voraussetzung, daß die lineare Abbildung $f : V \to W$ injektiv ist, gültig. Zum Nachweis seien $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot f(v_1) + \ldots + \lambda_n \cdot f(v_n) = 0_W.$$

Wegen der Linearität von f ergibt sich zunächst

$$f\left(\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n\right) = f\left(0_V\right)$$

und wegen der Injektivität von f dann

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = 0_V.$$

Da die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind, folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$; damit sind $f(v_1), \ldots, f(v_n) \in W$ linear unabhängig.