MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 9
19.12.2011

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Bearbeitungsvorschlag —

33. a) Sei $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-3\text{I}}{\overset{\text{III}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -3\lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$; damit sind

$$(-3\lambda) \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 + \lambda \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = 0$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ alle Darstellungen des Nullvektors 0 als Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4. Insbesondere sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig.

b) Für $\lambda = 1$ ergibt sich $v_3 = 3\,v_1 - v_2$, und damit ist $V = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$. Mit $A' = (v_1, v_2, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$(A'|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Es ist also $x = 0$ die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems $A' \cdot x = 0$; damit sind v_1, v_2, v_4 linear unabhängig. Folglich bilden v_1, v_2, v_4 eine Basis von V.

c) Die Basis v_1, v_2, v_4 von V läßt sich genau dann mit dem Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen, wenn $b \notin \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$ gilt. Wegen

$$(A'|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 2 & 5 & 0 & b_3 \\ 3 & 6 & 1 & b_4 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-3\text{I}}{\overset{\text{III}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & -4 & b_3 - 2\,b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_4 - 3\,b_1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -5 & b_3 - 2\,b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & -5 & b_4 - 3\,b_1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & -5 & b_3 - 2\,b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - b_3 - b_1 + b_2 \end{array}\right)$$

gilt dabei $b \notin V$ genau dann, wenn $b_1 + b_3 \neq b_2 + b_4$ ist.

34. Für einen Vektor $v \in V$ betrachten wir seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3, b_4 von V. Damit bilden die Vektoren

$$v_1 = b_1 + \beta_1 \cdot b_3, \quad v_2 = b_2 + \beta_2 \cdot b_4, \quad v_3 = \beta_3 \cdot b_1 + b_3, \quad v_4 = \beta_4 \cdot b_2 + b_4$$

genau dann eine Basis von V, wenn ihre Koordinatenvektoren

$$p(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad p(v_3) = \begin{pmatrix} \beta_3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(v_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden; dies ist aber genau dann der Fall, wenn die Matrix

$$A = (p(v_1),\ p(v_2),\ p(v_3),\ p(v_4)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

invertierbar ist, also $\det(A) \neq 0$ gilt. Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{IV}-\beta_2\text{II}}{\overset{\text{III}-\beta_1\text{I}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 1 - \beta_1\,\beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \beta_2\,\beta_4 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Diagonal–}}{=}} (1 - \beta_1\,\beta_3)\ (1 - \beta_2\,\beta_4)$$

sind also die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 genau dann eine Basis von V, wenn

$$(1 - \beta_1\,\beta_3)\ (1 - \beta_2\,\beta_4) \neq 0$$

gilt.

35. a) Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap W$ der beiden Unterräume $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, wenn er sowohl Linearkombination von u_1, u_2 als auch Linearkombination von w_1, w_2 ist, wenn es also Koeffizienten λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ und μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2}_{x \in U} = x = \underbrace{\mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2}_{x \in W}$$

gibt; dies führt aber zur Beziehung

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \mu_1 \cdot (-w_1) + \mu_2 \cdot (-w_2) = 0,$$

also zum linearen Gleichungssystem

$$A \cdot x = 0 \qquad \text{mit} \qquad A = (u_1, u_2, -w_1, -w_2) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-2\text{I}}{\overset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+3\text{II}}{\overset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{I}-\text{III},\text{II}-\text{III},\text{IV}-2\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,\alpha \\ 2\,\alpha \\ -4\,\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, woraus sich

$$\underbrace{(-3\,\alpha) \cdot u_1 + 2\,\alpha \cdot u_2}_{x \in U} = x = \underbrace{(-4\,\alpha) \cdot w_1 + \alpha \cdot w_2}_{x \in W}, \quad \text{also} \quad x = (-\alpha) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ergibt. Damit ist

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot v \qquad \text{mit} \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

weswegen v insbesondere eine Basis von $U \cap W$ ist.

b) Wir weisen anhand der Definition nach, daß u_1, u_2, w_1 eine Basis von $U+W$ ist:

- Es ist $U+W = \langle u_1, u_2, w_1, w_2 \rangle$; gemäß a) gilt (für $\alpha = -1$)

$$3\,u_1 - 2\,u_2 = v = 4\,w_1 - w_2,$$

also $w_2 = -3\,u_1 + 2\,u_2 + 4\,w_1$, woraus sich $U+W = \langle u_1, u_2, w_1 \rangle$ ergibt. Damit ist sind u_1, u_2, w_1 ein Erzeugendensystem von $U+W$.

- Offensichtlich sind u_1, u_2 linear unabhängig; gemäß a) ist

$$w_1 \notin \mathbb{R} \cdot v = U \cap W,$$

woraus sich wegen $w_1 \in W$ schon

$$w_1 \notin U = \langle u_1, u_2 \rangle$$

ergibt. Damit sind aber u_1, u_2, w_1 linear unabhängig.

Eine alternative Argumentation stützt sich auf die Dimension von $U+W$: da offenbar u_1, u_2 sowie w_1, w_2 jeweils linear unabhängig sind, gilt $\dim(U) = 2$ und $\dim(W) = 2$, und aus $v \neq 0$ folgt $\dim(U \cap W) = 1$; nach der Dimensionsformel ergibt sich also

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Damit genügt es, für die drei Vektoren u_1, u_2, w_1 von $U+W$ lediglich eine der beiden Eigenschaften — Erzeugendensystem oder lineare Unabhängigkeit — nachzuweisen.

Auf jeden Fall besitzt w_2 wegen

$$w_2 = (-3) \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 4 \cdot w_1$$

bezüglich der Basis u_1, u_2, w_1 die Koordinaten -3, 2, 4.

c) Für $A' = (u_1, u_2, w_1, e_1) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\det(A') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{4. Spalte}}{=} -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} -((0-2+3)-(2+0-1)) = 0;$$

damit sind u_1, u_2, w_1, e_1 linear abhängig, woraus sich wegen der linearen Unabhängigkeit von u_1, u_2, w_1 dann $e_1 \in \langle u_1, u_2, w_1 \rangle = U+W$ ergibt.

36. Es sei $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ der von den vier Vektoren

$$v_1 = a+b+c+d, \quad v_2 = b+c, \quad v_3 = c+d, \quad v_4 = a+b$$

aufgespannte Unterraum in einem reellen Vektorraum V; dabei sind die Vektoren a, b, c, d als linear unabhängig vorausgesetzt. Wegen

$$v_1 = (a + b) + (c + d) = v_4 + v_3 \in \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$$

wird der Unterraum U bereits durch die drei Vektoren v_2, v_3, v_4 erzeugt; zum Nachweis ihrer linearen Unabhängigkeit seien λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot v_2 + \lambda_2 \cdot v_3 + \lambda_3 \cdot v_4 = 0_V,$$

also

$$\lambda_1 \cdot (b + c) + \lambda_2 \cdot (c + d) + \lambda_3 \cdot (a + b) = 0_V$$

und damit

$$\lambda_3 \cdot a + (\lambda_1 + \lambda_3) \cdot b + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot c + \lambda_2 \cdot d = 0_V.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von a, b, c, d folgt daraus

$$\lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_2 = 0,$$

insgesamt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; folglich sind v_2, v_3, v_4 auch linear unabhängig und somit eine Basis von U. Für die Dimension von U ergibt sich demnach $\dim(U) = 3$.