MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 7
05.12.2011

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)" — Bearbeitungsvorschlag —

25. Seien $A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 6 \\ -2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Wegen

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & b_1 \\ 4 & -2 & 6 & b_2 \\ -2 & 8 & 4 & b_3 \end{array}\right) \underset{\text{III}+2\text{I}}{\overset{\text{II}-4\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & -14 & -14 & b_2 - 4\,b_1 \\ 0 & 14 & 14 & b_3 + 2\,b_1 \end{array}\right)$$
$$\underset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & -14 & -14 & b_2 - 4\,b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 2\,b_1 \end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ genau dann lösbar, der Vektor b also genau dann Linearkombination von v_1, v_2, v_3, wenn $b_3 + b_2 - 2\,b_1 = 0$ gilt. Damit ist

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{wegen} \qquad 2 + 5 - 2 \cdot 3 = 1 \neq 0$$

keine Linearkombination der v_1, v_2, v_3, während

$$w = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \text{wegen} \qquad 10 + 8 - 2 \cdot 9 = 0$$

eine Linearkombination der v_1, v_2, v_3 darstellt. Zur Ermittlung der Koeffizienten betrachten wir das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = w$:

$$(A|w) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 4 & -2 & 6 & 8 \\ -2 & 8 & 4 & 10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & -14 & -14 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\underset{\text{II}\cdot(-\frac{1}{14})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{I}-3\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist $L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 - 2\,\lambda \\ 2 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ die Lösungsmenge von $A \cdot x = w$; etwa für $\lambda = 1$ erhält man $w = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$.

26. Seien $A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ sowie $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Wegen

$$(A|v) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 3 & 3 & b_2 \\ 3 & 0 & 1 & b_3 \\ 4 & 1 & 1 & b_4 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I},\ \text{IV}-4\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & -3 & b_2 - 2\,b_1 \\ 0 & -6 & -8 & b_3 - 3\,b_1 \\ 0 & -7 & -11 & b_4 - 4\,b_1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{IV}-7\text{II}}{\overset{\text{III}-6\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & -3 & b_2 - 2\,b_1 \\ 0 & 0 & 10 & b_3 + 9\,b_1 - 6\,b_2 \\ 0 & 0 & 10 & b_4 + 10\,b_1 - 7\,b_2 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & -3 & b_2 - 2\,b_1 \\ 0 & 0 & 10 & b_3 + 9\,b_1 - 6\,b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 + b_1 - b_2 - b_3 \end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = v$ genau dann lösbar, der Vektor v also genau dann Linearkombination von v_1, v_2, v_3, wenn $b_1 - b_2 - b_3 + b_4 = 0$ gilt. Damit ist

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{wegen} \qquad 0 - 1 - 2 + 4 = 1 \neq 0$$

keine Linearkombination der v_1, v_2, v_3, während

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{wegen} \qquad 1 - 1 - 1 + 1 = 0$$

eine Linearkombination der v_1, v_2, v_3 darstellt. Zur Ermittlung der Koeffizienten betrachten wir das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = w$: wegen

$$(A|w) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die einzige Lösung von $A \cdot x = w$; damit erhält man die (eindeutig bestimmte) Linearkombination

$$w = \frac{1}{5}\,v_1 - \frac{1}{5}\,v_2 + \frac{2}{5}\,v_3.$$

27. Seien $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ sowie $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Wegen

$$(A|v) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right) \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = v$ für jede rechte Seite $v \in \mathbb{R}^3$ lösbar; folglich ist jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4, d.h. diese Vektoren bilden ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$. Wegen

$$(A|e_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

ist

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge von $A \cdot x = e_1$; damit ist

$$e_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) v_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) v_2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) v_3 + \lambda\, v_4$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen

$$(A|e_2) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

ist

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge von $A \cdot x = e_2$; damit ist

$$e_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) v_1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) v_2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) v_3 + \lambda\, v_4$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen

$$(A|e_3) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

ist

$$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge von $A \cdot x = e_3$; damit ist

$$e_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) v_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) v_2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) v_3 + \lambda\, v_4$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

28. Zum einen ist

$$\begin{aligned} v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} &= 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 \in \langle w_1, w_2 \rangle, \\ v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 \in \langle w_1, w_2 \rangle, \\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} &= (-1) \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \in \langle w_1, w_2 \rangle, \end{aligned}$$

also $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \langle w_1, w_2 \rangle$, und zum anderen

$$\begin{aligned} w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \\ w_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} &= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \end{aligned}$$

also $\langle w_1, w_2 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Insgesamt erhält man also $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$.

Alternativ kann man auch die Vektoren in $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ und $\langle w_1, w_2 \rangle$ explizit bestimmen:

Für $A_1 = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{aligned} (A_1 \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & b_1 \\ 1 & 2 & -1 & b_2 \\ 4 & -1 & 5 & b_3 \end{array}\right) &\underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b_2 \\ 6 & 4 & 2 & b_1 \\ 4 & -1 & 5 & b_3 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-4\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-6\mathrm{I}}{\leadsto}} \\ \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b_2 \\ 0 & -8 & 8 & b_1 - 6\, b_2 \\ 0 & -9 & 9 & b_3 - 4\, b_2 \end{array}\right) &\underset{\mathrm{III}-\frac{9}{8}\mathrm{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b_2 \\ 0 & -8 & 8 & b_1 - 6\, b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + \frac{11}{4}\, b_2 - \frac{9}{8}\, b_1 \end{array}\right); \end{aligned}$$

damit ist das lineare Gleichungssystem $A_1 \cdot x = b$ genau dann lösbar, der Vektor b also genau dann Linearkombination von v_1, v_2, v_3, wenn

$$b_3 + \frac{11}{4}\,b_2 - \frac{9}{8}\,b_1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 9\,b_1 - 22\,b_2 - 8\,b_3 = 0$$

gilt, weswegen sich

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \left\{ b \in \mathbb{R}^3 \mid 9\,b_1 - 22\,b_2 - 8\,b_3 = 0 \right\}$$

ergibt. Ferner ist für $A_2 = (w_1, w_2) = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 0 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}(A_2 \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 8 & b_1 \\ 1 & 0 & b_2 \\ -5 & 9 & b_3 \end{array}\right) &\underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_2 \\ -2 & 8 & b_1 \\ -5 & 9 & b_3 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+5\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 8 & b_1 + 2\,b_2 \\ 0 & 9 & b_3 + 5\,b_2 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\frac{9}{8}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 8 & b_1 + 2\,b_2 \\ 0 & 0 & b_3 + \frac{11}{4}\,b_2 - \frac{9}{8}\,b_1 \end{array}\right);\end{aligned}$$

damit ist das lineare Gleichungssystem $A_2 \cdot x = b$ genau dann lösbar, der Vektor b also genau dann Linearkombination von v_1, v_2, v_3, wenn

$$b_3 + \frac{11}{4}\,b_2 - \frac{9}{8}\,b_1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 9\,b_1 - 22\,b_2 - 8\,b_3 = 0$$

gilt, weswegen sich

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \left\{ b \in \mathbb{R}^3 \mid 9\,b_1 - 22\,b_2 - 8\,b_3 = 0 \right\}$$

ergibt. Ingesamt erhält man also

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \left\{ b \in \mathbb{R}^3 \mid 9\,b_1 - 22\,b_2 - 8\,b_3 = 0 \right\} = \langle w_1, w_2 \rangle.$$