MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 6
28.11.2011

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Bearbeitungsvorschlag —

21. a) Wegen $0 \in U_1$ ist $U_1 \neq \emptyset$. Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U_1$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$; damit gilt $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Für $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\begin{aligned} &(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = \\ &\qquad = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

also $x + y \in U_1$, sowie für $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \end{pmatrix}$

$$\lambda\, x_1 + \lambda\, x_2 + \lambda\, x_3 = \lambda\,(x_1 + x_2 + x_3) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

also $\lambda \cdot x \in U_1$. Folglich ist nach dem Unterraumkriterium U_1 ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

b) Es ist $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_2$ und $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, aber $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \notin U_2$. Damit ist U_2 kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

c) Wegen $0 \in U_3$ ist $U_3 \neq \emptyset$. Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U_3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$; damit gilt $x_1 + 2\,x_2 = 3\,x_3$ und $y_1 + 2\,y_2 = 3\,y_3$. Für $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\begin{aligned} &(x_1 + y_1) + 2\,(x_2 + y_2) = x_1 + y_1 + 2\,x_2 + 2\,y_2 = \\ &\qquad = (x_1 + 2\,x_2) + (y_1 + 2\,y_2) = 3\,x_3 + 3\,y_3 = 3\,(x_3 + y_3), \end{aligned}$$

also $x + y \in U_3$, sowie für $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \end{pmatrix}$

$$\lambda\, x_1 + 2\,(\lambda\, x_2) = \lambda\, x_1 + 2\,\lambda\, x_2 = \lambda\,(x_1 + 2\,x_2) = \lambda\,(3\,x_3) = 3\,(\lambda\, x_3),$$

also $\lambda \cdot x \in U_3$. Folglich ist nach dem Unterraumkriterium ist U_3 ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

d) Es ist $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_4$ und $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_4$, aber $x + y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_4$. Damit ist U_4 kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

22. a) Für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

und

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 + x_2 \\ x_3 + x_4 & x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$A \cdot X = X \cdot A \iff \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 + x_2 \\ x_3 + x_4 & x_3 + x_4 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 &=& x_1 + x_2 \\ x_2 + x_4 &=& x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 &=& x_3 + x_4 \\ x_2 + x_4 &=& x_3 + x_4 \end{array} \iff \begin{array}{rrrrcl} & -\,x_2 & +\,x_3 & & = & 0 \\ -\,x_1 & & & +\,x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & -\,x_4 & = & 0 \\ & x_2 & -\,x_3 & & = & 0 \end{array}$$

Für die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix gilt

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

woraus sich $L = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ ergibt.

b) Gemäß a) gilt

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

und wir haben

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \right\} = \{\alpha \cdot A + \beta \cdot E_2 \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}$$

zu zeigen:

- Für „$\subseteq$“ gilt für alle $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (\lambda - \mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot A + \beta \cdot E_2$$

  mit $\alpha = \mu$ und $\beta = \lambda - \mu$.
- Für „$\supseteq$“ gilt für alle $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot E_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

  mit $\lambda = \alpha + \beta$ und $\mu = \alpha$.

23. a) Wir zeigen mit Hilfe des Unterraumskriteriums, daß U und W Unterräume des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^3$ sind:

- Wegen $0 \in U$ ist $U \neq \emptyset$. Für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt zunächst $x_3 = x_1 + x_2$ und $y_3 = y_1 + y_2$; damit erhält man $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ mit

$$x_3 + y_3 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2),$$

  also $x + y \in U$, sowie $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \end{pmatrix}$ mit

$$\lambda\, x_3 = \lambda\, (x_1 + x_2) = \lambda\, x_1 + \lambda\, x_2,$$

  also $\lambda \cdot x \in U$. Damit ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.
- Wegen $0 \in W$ ist $W \neq \emptyset$. Für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt zunächst $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$; damit erhält man $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ mit $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, also $x + y \in W$, sowie $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda\, x_1 = \lambda x_2$, also $\lambda \cdot x \in W$. Damit ist W ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

b) Gemäß der Definition der Unterräume U und W gilt

$$U = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_3 = u_1 + u_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 + u_2 \end{pmatrix} \mid u_1, u_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$W = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 = w_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_3 \end{pmatrix} \mid w_1, w_3 \in \mathbb{R} \right\};$$

damit ergibt sich nach der Definition von $U + W$ dann

$$\begin{aligned} U + W &= \{u + w \mid u \in U, w \in W\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} u_1 + w_1 \\ u_2 + w_1 \\ u_1 + u_2 + w_3 \end{pmatrix} \mid u_1, u_2, w_1, w_3 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Für e_1 können wir etwa $u_1 = 1$, $u_2 = w_1 = 0$ und $w_3 = -1$ wählen und erhalten

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in U + W,$$

für e_2 können wir etwa $u_2 = 1$, $u_1 = w_1 = 0$ und $w_3 = -1$ wählen und erhalten

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in U + W,$$

und für e_3 können wir etwa $u_1 = u_2 = w_1 = 0$ und $w_3 = 1$ wählen und erhalten

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U + W.$$

Wegen $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ ist damit insbesondere $U + W = \mathbb{R}^3$ gezeigt.

c) Ein Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Unterraum $U \cap W$, wenn sowohl $x_3 = x_1 + x_2$ als auch $x_1 = x_2$ erfüllt ist, er also Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & = 0 \end{array}$$

ist. Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

ergibt sich demnach

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2\,\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot v \qquad \text{mit} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

anstelle von v kann auch jedes vom Nullvektor 0 verschiedene lineare Vielfache von v gewählt werden.

24. a) Es ist

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot ((u - v) + v) = \lambda \cdot (u - v) + \lambda \cdot v,$$

also $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$, sowie

$$\lambda \cdot v = ((\lambda - \mu) + \mu) \cdot v = (\lambda - \mu) \cdot v + \mu \cdot v,$$

also $(\lambda - \mu) \cdot v = \lambda \cdot v - \mu \cdot v$.

b) Es ist

$$\lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot (0_V + 0_V) = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V,$$

nach Subtraktion von $\lambda \cdot 0_V$ auf beiden Seiten also $0_V = \lambda \cdot 0_V$, sowie

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v,$$

nach Subtraktion von $0 \cdot v$ auf beiden Seiten also $0_V = 0 \cdot v$.

c) Es ist

$$(-\lambda) \cdot v = (0 - \lambda) \cdot v = 0 \cdot v - \lambda \cdot v = 0_V - \lambda \cdot v = -\lambda \cdot v$$

und

$$\lambda \cdot (-v) = \lambda \cdot (0_V - v) = \lambda \cdot 0_V - \lambda \cdot v = 0_V - \lambda \cdot v = -\lambda \cdot v.$$

d) Gemäß b) ist nur noch „$\Rightarrow$“ zu zeigen. Ist $\lambda = 0$, so ist man fertig; ist $\lambda \neq 0$, so gilt

$$0_V = \lambda^{-1} \cdot 0_V = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot v = 1 \cdot v = v.$$