MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 5
21.11.2011

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)" — Bearbeitungsvorschlag —

17. a) Es ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 2 \\ 0 & t-2 & -1 \\ -1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{=} (t-2) \cdot \begin{vmatrix} t+1 & 2 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} =$$
$$= (t-2) \cdot \big((t+1)(t-2) - 2 \cdot (-1)\big) = (t-2) \cdot \big((t^2 - t - 2) + 2\big) =$$
$$= (t-2) \cdot \big(t^2 - t\big) = (t-2)\, t\, (t-1);$$

damit ist A genau dann invertierbar, wenn $t \notin \{0, 1, 2\}$ gilt.

b) Es ist

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} +\det(A'_{11}) & -\det(A'_{21}) & +\det(A'_{31}) \\ -\det(A'_{12}) & +\det(A'_{22}) & -\det(A'_{32}) \\ +\det(A'_{13}) & -\det(A'_{23}) & +\det(A'_{33}) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (t-2)^2 & 0 & -2\,(t-2) \\ 1 & t\,(t-1) & t+1 \\ t-2 & 0 & (t+1)\,(t-2) \end{pmatrix},$$

und für $t \notin \{0, 1, 2\}$ erhält man

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{t-2}{t\,(t-1)} & 0 & -\frac{2}{t\,(t-1)} \\ \frac{1}{(t-2)\,t\,(t-1)} & \frac{1}{t-2} & \frac{t+1}{(t-2)\,t\,(t-1)} \\ \frac{1}{t\,(t-1)} & 0 & \frac{t+1}{t\,(t-1)} \end{pmatrix}.$$

18. a) Es ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{4. Spalte}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{vmatrix} = 1 + t^2.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\det(A) = 1 + t^2 \geq 1$, insbesondere also $\det(A) \neq 0$, und damit A invertierbar.

b) Es ist

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} +\det(A'_{11}) & -\det(A'_{21}) & +\det(A'_{31}) & -\det(A'_{41}) \\ -\det(A'_{12}) & +\det(A'_{22}) & -\det(A'_{32}) & +\det(A'_{42}) \\ +\det(A'_{13}) & -\det(A'_{23}) & +\det(A'_{33}) & -\det(A'_{43}) \\ -\det(A'_{14}) & +\det(A'_{24}) & -\det(A'_{34}) & +\det(A'_{44}) \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ -t^2 & -t & 1+t^2 & 0 \\ t^3 & t^2 & -t\,(1+t^2) & 1+t^2 \end{pmatrix}.$$

c) Da die Koeffizientenmatrix A des linearen Gleichungssytems $A \cdot x = b$ invertierbar ist, besitzt dieses genau eine Lösung, nämlich $x = A^{-1} \cdot b$. Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ -t^2 & -t & 1+t^2 & 0 \\ t^3 & t^2 & -t\,(1+t^2) & 1+t^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ -t^2 & -t & 1+t^2 & 0 \\ t^3 & t^2 & -t\,(1+t^2) & 1+t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t^2 \\ 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Cramerschen Regel erhält man für die Komponenten von x

$$x_1 = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ 1+t^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1-t^2 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{4. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & t & 0 \\ 1+t^2 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=}$$

$$\frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & t \\ 1+t^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \cdot (-t\,(1+t^2)) = -t,$$

$$x_2 = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1+t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-t^2 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} \frac{1}{1+t^2} \cdot (1 \cdot (1+t^2) \cdot 1 \cdot 1) = 1,$$

$$x_3 = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ -t & 1 & 1+t^2 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t^2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{4. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -t & 1 & 1+t^2 \\ 0 & t & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{3. Spalte}}{=}$$

$$\frac{1}{1+t^2} \cdot (-1) \cdot (1+t^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & t \end{vmatrix} = -t,$$

$$x_4 = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 1+t^2 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1-t^2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{3. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot \left[1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -t & 1 & 1+t^2 \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{vmatrix} - t \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -t & 1 & 1+t^2 \\ 0 & t & 0 \end{vmatrix} \right]$$

$$\underset{\text{3. Zeile}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot \left[(1-t^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{vmatrix} - t \cdot (-1)\, t \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1+t^2 \end{vmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{1+t^2} \cdot \left[(1-t^2)\,(1+t^2) + t^2\,(1+t^2) \right] = (1-t^2) + t^2 = 1.$$

19. a) Es ist

- $A_1 = (-1)$, also $\det(A_1) = -1$,
- $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, also $\det(A_2) = 1 - 1 = 0$, sowie
- $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, also $\det(A_3) = -1 + 0 + 0 - (0 - 1 - 1) = 1$.

b) Für $n \geq 4$ erhalten wir mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & \vdots & & & \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} =$$

$$= -\det(A_{n-1}) - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} \underset{\text{1. Spalte}}{=} -\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}).$$

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt $\det(A_n) = -\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$ und analog $\det(A_{n-1}) = -\det(A_{n-2}) - \det(A_{n-3})$, woraus $\det(A_n) = \det(A_{n-3})$ folgt. Damit ergibt sich für alle $k \in \mathbb{N}$

- $\det(A_{3k+1}) = \det(A_1) = -1$,
- $\det(A_{3k+2}) = \det(A_2) = 0$ sowie
- $\det(A_{3k+3}) = \det(A_3) = 1$.

20. Wir halten zunächst fest, daß eine Matrix $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, deren Koeffizienten b_{ij} ganze Zahlen sind, wegen

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot b_{n\sigma(n)}$$

auch eine ganzzahlige Determinante $\det(B)$ besitzt.

„a) $\Rightarrow$ b)" Sei zunächst A invertierbar, und alle Koeffizienten von A^{-1} seien ganze Zahlen; damit sind nach obiger Bemerkung die Determinanten

$$\det(A) \qquad \text{und} \qquad \det(A^{-1})$$

ganze Zahlen. Aus $A \cdot A^{-1} = E_n$ folgt mit dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(E_n) = 1,$$

woraus dann $\det(A) = \pm 1$ folgt.

„b) $\Rightarrow$ a)" Sei nun $\det(A) = \pm 1$. Wegen $\det(A) \neq 0$ ist A invertierbar. Da die Koeffizienten von A ganze Zahlen sind, so sind auch die Koeffizienten aller Streichungsmatrizen A'_{ji} ganze Zahlen und nach obiger Bemerkung auch deren Determinanten $\det(A'_{ji})$. Damit sind aber die Koeffizienten

$$\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A'_{ji})$$

für alle $i,\ j \in \{1, \ldots, n\}$ der komplementären Matrix $\widetilde{A}$ von A ganze Zahlen, woraus aufgrund von

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widetilde{A} = \pm \widetilde{A}$$

folgt, daß alle Koeffizienten von A^{-1} wieder ganze Zahlen sind.