

## Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Bearbeitungsvorschlag —

13. a) Man erhält mit Hilfe der Regel von Sarrus

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \\ 7 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= (3 \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot 7 + 4 \cdot (-3) \cdot (-6)) - \\ &- (4 \cdot 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 \cdot (-6) + (-2) \cdot (-3) \cdot 2) = \\ &= (6 - 14 + 72) - (28 - 18 + 12) = 64 - 22 = 42 \end{aligned}$$

sowie mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 6 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{I \leftrightarrow II}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{III-I \\ IV-I}}{=} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{III+2II \\ IV-II}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \end{vmatrix} \stackrel{IV-III}{=} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{Dreiecks-} \\ \text{matrix}}}{=} -1 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-16) = -48 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \det(C) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{III \leftrightarrow IV}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{II \leftrightarrow III}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{I \leftrightarrow II}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

b) Mit Hilfe des Determinantenmultiplikationssatzes sowie der Rechenregeln für die Determinante ergibt sich ferner

- $\det(2A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \cdot 42 = 336$ ,
- $\det(A^2) = \det(A)^2 = 42^2 = 1764$  und
- $\det(BC) = \det(B) \cdot \det(C) = (-48) \cdot (-1) = 48$ .

14. Es ist

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{= \\ 2 \text{ aus II, } 3 \text{ aus III, } 4 \text{ aus IV, } 5 \text{ aus V}}}{=} \\
 &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{= \\ \text{II-I, III-I, IV-I, V-I}}}{=} \\
 &= 120 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{= \\ ((\text{I+II})+\text{III})+\text{IV})+\text{V}}}{=} \\
 &= 120 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{= \\ \text{Dreiecks-} \\ \text{matrix}}}{=} 120 \cdot 4 \cdot (-1)^4 = 480.
 \end{aligned}$$

15. a) Mit der Regel von Sarrus gilt

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \begin{vmatrix} \sqrt{2} & a & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & a \\ a & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \\
 &= (2\sqrt{2} + a^3 - 2\sqrt{2}) - (-2a - 2a - 2a) = a^3 + 6a = a(a^2 + 6).
 \end{aligned}$$

Die Matrix  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(A) \neq 0$  gilt, was wegen  $a^2 + 6 \neq 0$  zu  $a \neq 0$  gleichwertig ist.

b) Wieder mit der Regel von Sarrus gilt

$$\begin{aligned}
 \det(S) &= \begin{vmatrix} \sqrt{2} & a & -a \\ -a & \sqrt{2} & a \\ a & -a & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \\
 &= (2\sqrt{2} + a^3 - a^3) - (-\sqrt{2}a^2 - \sqrt{2}a^2 - \sqrt{2}a^2) = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}a^2.
 \end{aligned}$$

Wegen  $\det(S) = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}a^2 \geq 2\sqrt{2}$  gilt insbesondere  $\det(S) \neq 0$ ; damit ist  $S$  invertierbar. Mit dem Determinantenmultiplikationssatz gilt

$$\begin{aligned} \det(S^{-1}AS) &= \det(S^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(S) = \\ &= \frac{1}{\det(S)} \cdot \det(A) \cdot \det(S) = \det(A) = a(a^2 + 6). \end{aligned}$$

16. a) Für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} A_\alpha \cdot A_\beta &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha^2}{2} \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta & \frac{\beta^2}{2} \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \beta + \alpha & \frac{\beta^2}{2} + \alpha\beta + \frac{\alpha^2}{2} \\ 0 & 1 & \beta + \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \beta & \frac{(\alpha+\beta)^2}{2} \\ 0 & 1 & \alpha + \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

b) Gemäß a) gilt

$$A_\alpha \cdot A_{-\alpha} = A_{\alpha+(-\alpha)} = A_0 = E_3;$$

damit ist  $A_\alpha$  invertierbar mit  $A_\alpha^{-1} = A_{-\alpha}$ .

c) Für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt  $A_{3\alpha} - 3A_{2\alpha} + 3A_\alpha =$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha & \frac{(3\alpha)^2}{2} \\ 0 & 1 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & \frac{(2\alpha)^2}{2} \\ 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha^2}{2} \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha & \frac{9\alpha^2}{2} \\ 0 & 1 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6\alpha & 6\alpha^2 \\ 0 & 3 & 6\alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3\alpha & \frac{3\alpha^2}{2} \\ 0 & 3 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \end{aligned}$$

d) Für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt wegen a)

$$A_{2\alpha} = A_{\alpha+\alpha} = A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha^2$$

und

$$A_{3\alpha} = A_{2\alpha+\alpha} = A_{2\alpha} \cdot A_\alpha = A_\alpha^2 \cdot A_\alpha = A_\alpha^3,$$

woraus sich mit c)

$$A_\alpha^3 - 3A_\alpha^2 + 3A_\alpha = E, \quad \text{also} \quad A_\alpha^3 - 3A_\alpha^2 + 3A_\alpha - E = 0$$

ergibt; wir können also  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = -3$  und  $a_3 = 1$  wählen.

(Bemerkung: Durch die Wahl  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$  wird zwar offensichtlich die gewünschte Beziehung

$$a_3 A_\alpha^3 + a_2 A_\alpha^2 + a_1 A_\alpha + a_0 E = 0$$

erreicht, die Bestimmung erfolgt aber ohne die geforderte Hilfe der Teilaufgaben a) und c).)