

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Bearbeitungsvorschlag —

9. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\delta = ad - bc \neq 0$ ist; in diesem Fall gilt dann $A^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- a)
- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ist $\delta = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1 \neq 0$; damit ist A invertierbar, und es gilt $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ist $\delta = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$; damit ist A nicht invertierbar.
 - Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist $\delta = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1 \neq 0$; damit ist A invertierbar, und es gilt $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
 - Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ist $\delta = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -2 \neq 0$; damit ist A invertierbar, und es gilt $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- b)
- Für $A = \begin{pmatrix} s & t \\ -t & s \end{pmatrix}$ ist $\delta = s \cdot s - t \cdot (-t) = s^2 + t^2$; damit ist A genau dann invertierbar, wenn $s^2 + t^2 \neq 0$, also wenn $s \neq 0$ oder $t \neq 0$ gilt. In diesem Falle gilt dann $A^{-1} = \frac{1}{s^2+t^2} \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix}$.
 - Für $A = \begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix}$ ist $\delta = s \cdot s - t \cdot t = s^2 - t^2$; damit ist A genau dann invertierbar, wenn $s^2 - t^2 \neq 0$, also wenn $s \neq t$ und $s \neq -t$ gilt. In diesem Falle gilt dann $A^{-1} = \frac{1}{s^2-t^2} \begin{pmatrix} s & -t \\ -t & s \end{pmatrix}$.
 - Für $A = \begin{pmatrix} s & t \\ -s & t \end{pmatrix}$ ist $\delta = s \cdot t - t \cdot (-s) = 2st$; damit ist A genau dann invertierbar, wenn $2st \neq 0$, also wenn $s \neq 0$ und $t \neq 0$ gilt. In diesem Falle gilt dann $A^{-1} = \frac{1}{2st} \begin{pmatrix} t & -t \\ s & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2t} & -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2s} & \frac{1}{2s} \end{pmatrix}$.

- Für $A = \begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix}$ ist $\delta = s \cdot t - t \cdot s = 0$; damit ist A für keine Wahl von s und t invertierbar.

10. Es ist

$$\begin{aligned} (A|E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} + (-1)\text{II}} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} + (-1)\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) = (E_3|A') \end{aligned}$$

Damit ist A invertierbar mit $A^{-1} = A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Es ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} + (-4)\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + (-7)\text{I}} \xrightarrow{\text{III} + (-2)\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1$$

Da die dritte Zeile von B_1 Null ist, kann die Matrix B_1 nicht invertierbar sein; damit ist auch die zu B_1 zeilenäquivalente Matrix B nicht invertierbar.

Es ist

$$\begin{aligned} (C|E_4) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} + (-1)\text{I}} \xrightarrow{\text{IV} + (-1)\text{I}} \\ &\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} + (-1)\text{II}} \xrightarrow{\text{IV} + (-1)\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{IV}} \xrightarrow{\text{IV} \cdot (-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} + 2\text{IV}} \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) = (E_4|C') \end{aligned}$$

Damit ist C invertierbar mit $C^{-1} = C' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Für die in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} (M_\alpha | E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\stackrel{\sim}{\underset{\text{I} \leftrightarrow \text{II}}{}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\stackrel{\sim}{\underset{\text{III} - 2\text{I}}{}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ &\stackrel{\sim}{\underset{\text{II} - \alpha\text{III}}{}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ &\stackrel{\sim}{\underset{\text{I} + 2\text{II}}{}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 1 + 4\alpha & -2\alpha \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ &\stackrel{\sim}{\underset{\substack{(-1) \cdot \text{I} \\ (-1) \cdot \text{II}}{}}{}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 - 4\alpha & 2\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) = (E_3 | M'_\alpha); \end{aligned}$$

damit ist M_α invertierbar, und für ihre Inverse gilt

$$M_\alpha^{-1} = M'_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & -1 - 4\alpha & 2\alpha \\ -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

12. a) Es ist

$$\begin{aligned} (A_s | E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ s^2 & 1 & s & 0 & 1 & 0 \\ s & s^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{\sim}{\underset{\substack{\text{II} - s^2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - s \cdot \text{I}}{}}{}} \\ &\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - s^3 & s - s^4 & -s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - s^3 & -s & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit ist für $s = 1$ die Matrix A_s zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ zeilenäquivalent

und folglich nicht invertierbar. Für $s \neq 1$ ist $1 - s^3 \neq 0$, und man erhält

$$\begin{aligned}
 (A_s|E_3) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s^3 & s(1-s^3) & -s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s^3 & -s & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} \cdot \frac{1}{1-s^3} \\ \sim \\ \text{IV} \cdot \frac{1}{1-s^3} \end{array} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s & -\frac{s^2}{1-s^3} & \frac{1}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{I} \sim \text{II} \end{array} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 1 & s & -\frac{s^2}{1-s^3} & \frac{1}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{II} \sim \text{III} \end{array} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array} \right) = (E_3|B_s)
 \end{aligned}$$

Damit ist A_s invertierbar mit

$$A_s^{-1} = B_s = \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Für $s \neq 1$ ist A_s nach a) invertierbar; damit besitzt das lineare Gleichungssystem $A_s \cdot x = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ genau eine Lösung, nämlich

$$\begin{aligned}
 x = A_s^{-1} \cdot b &= \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1-s \\ 1-s \\ 1-s \end{pmatrix} = \frac{1-s}{1-s^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+s+s^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$L_s = \left\{ \frac{1}{1+s+s^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungsmenge des durch $(A_s|b)$ gegebenen linearen Gleichungssystems. Für $s = 1$ gilt

$$(A_1|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Damit ist

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\lambda-\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des durch $(A_1|b)$ gegebenen linearen Gleichungssystems.