MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 2
31.10.2011

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Bearbeitungsvorschlag —

5. Es ist

$$C(A-3\,B^\top)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\right]=$$
$$=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&2&6\\3&5&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&12&-4\\6&26&-2\end{pmatrix}$$

und

$$2\,AB+C=2\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=$$
$$=2\cdot\begin{pmatrix}-2&4\\2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&10\\7&4\end{pmatrix}$$

und

$$C^2-5C-2E=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&10\\15&20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0$$

und

$$A^\top C-BC^\top=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}10&14\\8&12\\6&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3\\-2&-4\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&11\\10&16\\3&5\end{pmatrix}$$

und

$$A^\top B^\top-BA=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&-3&5\\2&-2&2\\3&-1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&-2&-1\\5&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-5&2\\5&0&3\\-2&-3&0\end{pmatrix}.$$

6. Es ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $D \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Das Produkt zweier Matrizen ist genau dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmt. Daher lassen sich die folgenden Produkte bilden:

- $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -8 & 17 \\ 7 & -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$,
- $A \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ -6 & 5 & 11 \end{pmatrix}$,
- $B \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$,
- $C \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -3 & 5 \\ -11 & -1 & 4 & -12 \\ 14 & -3 & -5 & 13 \end{pmatrix}$,
- $C \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -5 & -7 \\ -5 & 14 & 1 \\ -7 & 1 & 14 \end{pmatrix}$ und
- $D \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 8 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Für jeden Spaltenvektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ gilt

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & b_2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & b_3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & b_4 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2+b_1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & b_3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & b_4 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III-I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2+b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3-b_1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & b_4 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2+b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3-b_1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & b_4+b_1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV-II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2+b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3-b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_4-b_2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV-III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2+b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4-b_2-b_3+b_1 \end{array}\right).$$

a) Damit besitzt das durch $(A|b)$ gegebene Gleichungssystem genau dann keine Lösung, wenn $b_4 - b_2 - b_3 + b_1 \neq 0$ gilt; somit ist $L = \emptyset$ für $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

b) Das durch $(A|b)$ gegebene Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $b_4 - b_2 - b_3 + b_1 = 0$ gilt. In diesem Fall erhält man aber

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

damit ist x_4 eine freie Variable, und das Gleichungssystem besitzt schon unendlich viele Lösungen. Folglich kann es kein $b \in \mathbb{R}^4$ gegen, so daß das durch $(A|b)$ gegebene Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt.

c) Es ist

$$(A|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

mit $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhält man

- $x_3 = -2\,x_4 = -2\,\lambda$,
- $2\,x_2 = 2 - x_3 = 2 + 2\,\lambda$, also $x_2 = 1 + \lambda$, und
- $x_1 = 1 - 4\,x_2 - x_3 = 1 - 4\,(1 + \lambda) + 2\,\lambda = -3 - 2\,\lambda$.

Damit ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -3 - 2\,\lambda \\ 1 + \lambda \\ -2\,\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des durch $(A|b_0)$ gegebenen linearen Gleichungssystems.

8. Wir ermitteln im ersten Schritt die notwendige Gestalt einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{mit} \qquad A^2 = 0.$$

Wegen

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b \cdot c & a \cdot b + b \cdot d \\ a \cdot c + c \cdot d & b \cdot c + d^2 \end{pmatrix}$$

ergeben sich auf der Hauptdiagonale die Bedingungen

$$a^2 + b \cdot c = 0 \qquad \text{und} \qquad b \cdot c + d^2 = 0$$

sowie auf der Nebendiagonale die Bedingungen

$$a \cdot b + b \cdot d = 0 \qquad \text{und} \qquad a \cdot c + c \cdot d = 0,$$

also

$$b \cdot (a + d) = 0 \qquad \text{und} \qquad c \cdot (a + d) = 0,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Im Falle $a + d \neq 0$ muß wegen der Nebendiagonale

  $$b = 0 \qquad \text{und} \qquad c = 0$$

  gelten, woraus sich wegen der Hauptdiagonale

  $$a^2 = 0, \quad \text{also} \quad a = 0, \qquad \text{und} \qquad d^2 = 0, \quad \text{also} \quad d = 0,$$

  ergibt; damit erhält man in $a + d = 0$ einen Widerspruch, so daß dieser Fall nicht eintreten kann.

- Im Falle $a + d = 0$ ist $d = -a$, und aus

  $$a^2 + b \cdot c = 0, \quad \text{also} \quad a^2 = -b \cdot c,$$

  erhält man

  $$b \cdot c \leq 0 \quad \text{mit} \quad a = \pm\sqrt{-b \cdot c} \quad \text{und} \quad d = \mp\sqrt{-b \cdot c},$$

  so daß in diesem Fall die Matrizen

  $$A = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{-b \cdot c} & b \\ c & \mp\sqrt{-b \cdot c} \end{pmatrix}$$

  mit reellen Koeffizienten b, $c \in \mathbb{R}$ mit $b \cdot c \leq 0$ in Frage kommen.

Wir überprüfen nun im zweiten Schritt, ob die in Frage kommenden Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tatsächlich die gewünschte Eigenschaft $A^2 = 0$ besitzen; dies ist wegen

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} \pm\sqrt{-b \cdot c} & b \\ c & \mp\sqrt{-b \cdot c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pm\sqrt{-b \cdot c} & b \\ c & \mp\sqrt{-b \cdot c} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\pm\sqrt{-b \cdot c}\right)^2 + b \cdot c & \left(\pm\sqrt{-b \cdot c}\right) \cdot b + b \cdot \left(\mp\sqrt{-b \cdot c}\right) \\ c \cdot \left(\pm\sqrt{-b \cdot c}\right) + \left(\mp\sqrt{-b \cdot c}\right) \cdot c & b \cdot c + \left(\mp\sqrt{-b \cdot c}\right)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

für reelle Koeffizienten b, $c \in \mathbb{R}$ mit $b \cdot c \leq 0$ auch in der Tat der Fall.