

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. Für die gegebenen linearen Gleichungssysteme betrachte man die zugehörigen erweiterten Koeffizientenmatrizen. Es gilt

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 2 \\ 7 & -5 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{II}-5\cdot\text{I}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -3 & -3 \\ 7 & -5 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{II}-7\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -3 & -3 \\ 0 & -12 & -3 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{II}\cdot(-\frac{1}{9})} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -3 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{III}+4\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit ist $x_3 = 0$, damit $3x_2 + x_3 = 1$, also $x_2 = \frac{1}{3}$, und damit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, also $x_1 = \frac{2}{3}$; folglich ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungsmenge des linken Gleichungssystems.

Es ist natürlich auch möglich, das lineare Gleichungssystem über

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{II}-\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\frac{1}{3}\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{I}-\text{II}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{I}-\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

sogar in die reduzierte Zeilenstufenform zu bringen und von dieser dann die Lösungsmenge direkt abzulesen.

Des weiteren ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{II}-3\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{III}-4\cdot\text{I}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -7 & -6 & | & -3 \\ 5 & -3 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{IV}-5\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -7 & -6 & | & -3 \\ 0 & -8 & -8 & | & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{III}+7\cdot\text{II}} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 8 & | & 18 \\ 0 & -8 & -8 & | & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{IV}+8\cdot\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 8 & | & 18 \\ 0 & 0 & 8 & | & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{IV}-\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 8 & | & 18 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist das rechte Gleichungssystem nicht lösbar; es ist $L = \emptyset$.

2. Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & | & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 7 & | & 24 \\ 4 & 3 & -6 & -2 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{II}-3\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & | & -2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & | & 30 \\ 4 & 3 & -6 & -2 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{III}-4\cdot\text{I}} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & | & -2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & | & 30 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{(-\frac{1}{5})\cdot\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & | & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{III}+\text{II}} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & | & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{I}-\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & | & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 4 - \mu \\ -6 + 2\lambda + 2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des linken Gleichungssystems. Ferner ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & | & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & | & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{II}-2\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & | & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{III}-4\cdot\text{I}} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & | & -4 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{IV}-7\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & | & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & | & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{III}+\text{II}} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & | & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & | & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{IV}+3\cdot\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & | & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & | & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\text{IV}-3\cdot\text{III}} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{(-1)\cdot\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Damit gilt

- $5x_4 = 4$, also $x_4 = \frac{4}{5}$,
- $x_3 + 3x_4 = 3$, also $x_3 = 3 - 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$,
- $x_2 + x_3 = 1$, also $x_2 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, und
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, also $x_1 = 2 - \frac{4}{5} - \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

Damit ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungsmenge des rechten Gleichungssystems.

3. Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & & s x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & & 2 x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2 x_2 & + & & s x_3 & - & 2 s x_4 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 2(s-1) x_3 & + & 3 x_4 & = & 2 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_s|b)$. Es ist

$$\begin{aligned} (A_s|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & s & -2s & -1 \\ 1 & 0 & 2(s-1) & 3 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{III}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2s-1 & -2 \\ 1 & 0 & 2(s-1) & 3 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{IV}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2s-1 & -2 \\ 0 & 1 & s-2 & 2 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2s & -2 \\ 0 & 1 & s-2 & 2 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{IV}-\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2s & -2 \\ 0 & 0 & s & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{2} \cdot \text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 1 \\ 0 & 0 & s & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-s \cdot \text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s^2 & 1-s \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dies legt die Fallunterscheidung $1-s^2=0$, also $s=1$ oder $s=-1$, und $1-s^2 \neq 0$, also $s \notin \{-1, 1\}$ nahe:

Für $s=1$ gilt

$$(A_1|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

mit $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhält man

- $x_3 + x_4 = 1$, also $x_3 = 1 - x_4 = 1 - \lambda$,
- $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$, also $x_2 = 2x_3 - x_4 = 2(1 - \lambda) - \lambda = 2 - 3\lambda$, und
- $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$, also $x_1 = 1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 + (2 - 3\lambda) - (1 - \lambda) - \lambda = 2 - 3\lambda$;

$$\text{damit ist } L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2-3\lambda \\ 2-3\lambda \\ 1-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ die Lösungsmenge für } s=1.$$

Für $s=-1$ gilt

$$(A_{-1}|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right);$$

damit ist das Gleichungssystem für $s=-1$ nicht lösbar; es ist $L_{-1} = \emptyset$.

Für $s \notin \{-1, 1\}$ ist $1-s^2 \neq 0$, und wir erhalten

- $(1-s^2)x_4 = 1-s$, also $x_4 = \frac{1-s}{1-s^2} = \frac{1}{1+s}$,
- $x_3 + sx_4 = 1$, also $x_3 = 1 - sx_4 = 1 - s \cdot \frac{1}{1+s} = \frac{1}{1+s}$,
- $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$, also $x_2 = 2x_3 - x_4 = 2 \cdot \frac{1}{1+s} - \frac{1}{1+s} = \frac{1}{1+s}$, und
- $x_1 - x_2 + sx_3 + x_4 = 1$, also $x_1 = 1 + x_2 - sx_3 - x_4 = 1 + \frac{1}{1+s} - s \cdot \frac{1}{1+s} - \frac{1}{1+s} = \frac{1}{1+s}$;

$$\text{damit ist } L_s = \left\{ \frac{1}{1+s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ die Lösungsmenge für } s \notin \{-1, 1\}.$$

4. Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & & & 2x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & & & = & -3 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & & & \alpha x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & \beta \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\alpha|b_\beta)$. Es ist

$$\begin{aligned}
 (A_\alpha|b_\beta) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & \alpha & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & \beta \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{II}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & \alpha & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & \beta \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[\sim]{\text{III}+3\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & \alpha-3 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & \beta \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{IV}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & \alpha-3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & \beta+2 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[\sim]{\text{III}-2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-7 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & \beta+2 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{IV}-2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $\beta = 0$ gilt; dabei ergibt sich

- für $\alpha = 7$ wegen

$$(A_7|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 - 2\lambda + \mu \\ 1 - 3\lambda - 2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

sowie

- für $\alpha \neq 7$ wegen

$$(A_\alpha|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\text{III} \cdot \frac{1}{\alpha-7}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 - 2\lambda \\ 1 - 3\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$