MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 13
03.02.2012

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

49. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1995).* Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f = \ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}.$$

a) Man berechne $\mathrm{Kern}(f)$ und den Rang von A.

b) Sei U der von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 21 \end{pmatrix}$$

erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Man gebe eine Basis von $f(U)$ an.

c) Man gebe einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ an, der nicht in $\mathrm{Bild}(f)$ liegt.

50. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in } \mathbb{R}^3$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{in } \mathbb{R}^2$$

sowie die Matrix $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und w_1, w_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, und bestimme die darstellende Matrix von $\ell_{A_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser beiden Basen.

b) Warum gibt es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$? Man bestimme zudem eine Matrix $A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $f = \ell_{A_2}$.

c) Man bestimme eine Matrix $A_3 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ derart, daß für die lineare Abbildung $g = \ell_{A_3} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sowohl $\mathrm{Kern}(g) = \mathbb{R}\, w_1$ als auch $\mathrm{Bild}(g) = \mathbb{R}\, v_1$ gilt.

51. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2010).* Man betrachte die Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}), \quad p \mapsto p' - (X+1) \cdot p''.$$

Dabei bezeichne p' bzw. p'' die erste bzw. zweite Ableitung des Polynoms p.

a) Man zeige, daß f linear ist.

b) Man bestimme die darstellende Matrix M von f bezüglich der Standardbasen 1, X, X^2, X^3 von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ und 1, X, X^2 von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

c) Man berechne eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ sowie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

52. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).* Für die reelle 3×4–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

betrachte man die zugehörige lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x;$$

es seien $U = \mathrm{Kern}(f)$ der Kern von f sowie $W = \mathrm{Bild}(f)$ der Bildraum von f.

a) Man zeige, daß sowohl U als auch W die Dimension 2 besitzt, und bestimme eine Basis von U sowie eine Basis von W.

b) Man ermittle eine Basis von $\mathbb{R}^4$ und eine Basis von $\mathbb{R}^3$, so dass f bezüglich dieser Basen die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

besitzt.

Abgabe bis Freitag, den 10. Februar 2012, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).