MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 12
27.01.2012

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

45. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Für die reelle 3×4–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -3 & -7 \\ 3 & -6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

betrachte man die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x.$$

Es seien $U = \mathrm{Kern}(f)$ der Kern von f sowie $W = \mathrm{Bild}(f)$ der Bildraum von f.

a) Man zeige, daß sowohl U als auch W die Dimension 2 besitzt. Man bestimme eine Basis u_1, u_2 von U und eine Basis w_1, w_2 von W.

b) Man entscheide, ob es eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $\mathrm{Kern}(g) = W$ und $\mathrm{Bild}(g) = U$ gibt, und begründe diese Entscheidung.

46. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben; dabei ist t ein reeller Parameter.

a) Man bestimme alle Parameter $t \in \mathbb{R}$, für die v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, und stelle in den anderen Fällen den Nullvektor jeweils als nichttriviale Linearkombination dieser Vektoren dar.

b) Man bestimme alle Parameter $t \in \mathbb{R}$, für die es eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f(v_3) = w_3$$

gibt. Man entscheide mit Begründung, in welchen Fällen f dadurch eindeutig bestimmt ist.

47. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011).* Es seien V ein reeller Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$ und $f : V \to V$ ein Endomorphismus von V. Man zeige:

a) Ist $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0_V\}$, so ist $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f)$.

b) Ist $f \circ f = f$, so ist $\mathrm{Bild}(f)$ die Menge der Fixpunkte von f, und es gilt $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f)$.

48. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).* Für die fest gewählte Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

betrachte man die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad f(A) = A \cdot M - M \cdot A.$$

Man zeige, daß f eine lineare Abbildung ist, und bestimme für $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$ jeweils eine Basis und die Dimension.

Abgabe bis Freitag, den 3. Februar 2012, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).