

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

41. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2007*). In Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ sei $L \subseteq \mathbb{R}^4$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcccccl} x_1 & + & (2-b)x_2 & - & 2x_3 & & = & 1-b \\ & & & & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & a-1 \\ 2x_1 & - & & 2bx_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3-a-2b \end{array}$$

- a) Man zeige: L ist die Gerade

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Nun sei $H \subseteq \mathbb{R}^4$ die Hyperebene mit der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Für welche Wahl der Parameter a und b ist

- (i) $L \subseteq H$; (ii) $L \cap H$ ein Punkt; (iii) $L \cap H$ leer?

42. Man bestimme in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

und gebe die Dimension von $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot x = 0\}$ an.

43. a) Für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zeige man

$$\text{Rang}(A+B) \leq \text{Rang}(A) + \text{Rang}(B).$$

- b) Für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ zeige man

$$\text{Rang}(AB) \leq \min \{\text{Rang}(A), \text{Rang}(B)\}.$$

44. Gegeben sei die Abbildung

$$f : \text{Pol}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Pol}_2(\mathbb{R}), \quad a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \mapsto 3a_3X^2 + 2a_2X + a_1.$$

- a) Man zeige, daß f eine lineare Abbildung ist.
b) Man untersuche f auf Injektivität und Surjektivität.

Abgabe bis Freitag, den 27. Januar 2012, 10⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).