

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

37. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2010*). In Abhängigkeit von einem Parameter $s \in \mathbb{R}$ seien die beiden 3×3 -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & 1-s & 0 \\ s & s & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -s & s & -1 \\ 0 & -1 & s \\ s^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- a) Man bestimme alle $s \in \mathbb{R}$, für die A bzw. B invertierbar sind.
 - b) Man bestimme in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix $A \cdot B$.
38. Man entscheide, für welche $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ die Beziehung

$$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B) = r \implies \text{Rang}(A \cdot B) = r$$

für alle $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gültig ist, und begründe die Entscheidung.

39. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010*).

- a) Man bestimme eine Basis für den Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrrrrcl} 2x_1 & + & 9x_2 & - & 5x_3 & + & 12x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & & & = & 0 \\ & & & & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

- b) Man zeige, daß $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-12, 3, 0, 0, 0)$ eine spezielle Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrrrrcl} 2x_1 & + & 9x_2 & - & 5x_3 & + & 12x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & & & = & 0 \\ & & & & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & - & x_5 & = & 3 \end{array}$$

ist.

- c) Man bestimme ohne weitere Rechnung die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems aus b).

40. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2003*). In Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ wird das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 8 \\ -1 & 3 & \alpha - 3 & -12 \\ 2 & \alpha & 6 & \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

betrachtet.

- a) Man gebe für $\alpha = -3$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.
- b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem lösbar? Man bestimme für diese α die Dimension des Lösungsraums.

Abgabe bis Freitag, den 20. Januar 2012, 10⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).