

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

33. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011*). Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man zeige, daß der von v_1, v_2, v_3, v_4 erzeugte Unterraum V von $\mathbb{R}^4$ den Vektor v enthält und bestimme die Dimension von V .

34. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2011*). Im $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\text{Pol}(\mathbb{R})$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten seien

$$u_1 = X^3 + X^2, \quad u_2 = X^2 + X \quad \text{und} \quad u_3 = X + 1$$

sowie

$$w_1 = X^3 - X^2 + X \quad \text{und} \quad w_2 = X^2 - X + 1$$

gegeben; ferner seien $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ die von u_1, u_2, u_3 bzw. von w_1, w_2 erzeugten Unterräume von V . Man bestimme eine Basis des Unterraums $U \cap W$.

35. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2005*). Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ sei

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A^\top = A \text{ und } \text{Spur}(A) = 0\};$$

dabei bezeichne $\text{Spur}(A)$ die Summe der Diagonalelemente von A .

- a) Man zeige, daß U ein Unterraum von $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist, und bestimme $\dim(U)$.
- b) Man zeige, daß

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in U liegen und linear unabhängig sind, und ergänze A_1, A_2 zu einer Basis von U .

36. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum sowie $U_1, \dots, U_r$ Unterräume von V .

- a) Man leite im Falle $r = 3$ eine Formel für $\dim(U_1 + U_2 + U_3)$ her.
- b) Man zeige für alle $r \geq 2$ mit Hilfe vollständiger Induktion

$$\dim(U_1 + \dots + U_r) \leq \dim(U_1) + \dots + \dim(U_r).$$

Abgabe bis Freitag, den 13. Januar 2012, 10⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).