

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

25. a) In $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ sind $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Man untersuche, ob $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ Linearkombinationen von A_1 , A_2 , A_3 sind, und gebe gegebenenfalls eine solche an.

- b) In $\text{Pol}(\mathbb{R})$ sind $f_1 = X + 1$, $f_2 = X^2 + X$ und $f_3 = X^3 + X^2$ gegeben. Man untersuche, ob $g = 4X^3 + 5X^2 + 3X - 2$ und $h = 2X^3 + 3X^2 - X - 2$ Linearkombinationen von f_1 , f_2 , f_3 sind, und gebe gegebenenfalls eine solche an.

26. Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^4$, die Linearkombination von v_1 , v_2 , v_3 sind, und gebe für u und w gegebenenfalls eine solche an.

27. Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ sind die Teilmengen $U = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A^\top = A\}$ und $W = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A^\top = -A\}$ gegeben.

- a) Man zeige, daß U und W Unterräume von V sind.
- b) Man bestimme $U \cap W$ und $U + W$.
- c) Man gebe jeweils ein Erzeugendensystem für U und für W an.

28. a) Für die beiden Unterräume

$$U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ bestimme man einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$.

- b) Man zeige, daß die beiden Unterräume

$$U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ übereinstimmen.