

## Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

21. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011*). Man untersuche, bei welchen der folgenden Teilmengen es sich um Unterräume von  $\text{Pol}(\mathbb{R})$  handelt:
- $U_1 = \{f \in \text{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = aX^2 + bX + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ,
  - $U_2 = \{f \in \text{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = aX^2 + bX \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\}$ ,
  - $U_3 = \{f \in \text{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = 0 \text{ oder } \text{Grad}(f) \geq 2\}$ ,
  - $U_4 = \{f \in \text{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = aX^2 + bX + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } c \neq 0\}$ .
22. Man untersuche, bei welchen der folgenden Teilmengen es sich um Unterräume von  $\mathbb{R}^{m \times n}$  bzw. von  $\mathbb{R}^{n \times n}$  handelt:
- $U_1 = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid A \text{ ist in Zeilenstufenform}\}$ ,
  - $U_2 = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid A^\top \cdot A = 0\}$ ,
  - $U_3 = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^2 = A\}$ ,
  - $U_4 = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) = 0\}$ .
23. a) Man bestätige, daß die beiden Teilmengen
- $$U = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 = u_2 \text{ und } u_1 = -u_3\} \quad \text{und} \quad W = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 = -2w_2\}$$
- Unterräume von  $\mathbb{R}^3$  sind, und zeige  $e_1, e_2, e_3 \in U + W$  explizit.
- b) Man bestätige, daß die beiden Teilmengen
- $$U = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid 2u_1 + u_2 = 0 \text{ und } u_1 + 2u_2 + u_3 = 0\}$$
- und
- $$W = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid w_2 + 2w_3 + w_4 = 0 \text{ und } 4w_3 + 3w_4 = 0\}$$
- Unterräume von  $\mathbb{R}^4$  sind, und bestimme ein  $v \in \mathbb{R}^4$  mit  $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$ .
24. Man untersuche, für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Teilmenge
- $$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \text{ und } \alpha x_1 - x_2 = 0\}$$
- ein Unterraum von  $\mathbb{R}^3$  ist.

**Abgabe** bis Freitag, den 9. Dezember 2011, 10<sup>00</sup> Uhr (Kästen vor der Bibliothek).