

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

13. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Man berechne $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(C)$.
- Man bestimme $\det(\frac{1}{3}A)$, $\det(B^{-1}B^T)$ und $\det(CBC^{-1})$.

14. In Abhängigkeit vom reellen Parameter t betrachte man die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- Man untersuche A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ auf Invertierbarkeit und bestimme in diesen Fällen $\det(A_t^{-1})$.
- Sei nun $t = 1$ gewählt. Gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $B^{10} = A_t$ bzw. eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $C^{10} = A_t^{-1}$?

15. a) Man bestimme alle $a, b \in \mathbb{R}$, so daß das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + bx_3 &= r \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 &= s \\ bx_1 + bx_2 + ax_3 &= t \end{aligned}$$

für alle $r, s, t \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist.

b) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bestimme man $A^3 - 3A^2 + 4E_3$ und leite daraus die inverse Matrix A^{-1} her.

16. Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ betrachte man die Abbildung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(\lambda) = \det(A - \lambda E_2)$.

- Man zeige, daß $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{Spur}(A) \cdot \lambda + \det(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.
- Man bestimme die Matrix $A^2 - \text{Spur}(A) \cdot A + \det(A) \cdot E_2$.
- Man gebe Beispiele von Matrizen A an, für die p keine bzw. eine doppelte bzw. zwei einfache Nullstellen besitzt.
- Man zeige, daß p für eine symmetrische Matrix A mindestens eine Nullstelle besitzt. In welchen Fällen liegt dabei eine doppelte Nullstelle vor?