MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 2
04.11.2011

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

5. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008).*

   a) Man löse das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

   b) Ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^4$?

6. a) Man berechne für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

   alle Produkte aus je zwei Faktoren, sofern diese definiert sind.

   b) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ berechne man die Matrix $A^3 - 5A^2 + 4A + E$.

7. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2007).* Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

   betrachte man die Determinante $\delta = a\,d - b\,c$ sowie die Spur $s = a + d$.

   a) Man zeige: $\delta \cdot E_2 - s \cdot A + A^2 = 0$.

   b) Man folgere aus a):

$$A^2 = E_2 \iff \big((s = 0 \ \wedge \ \delta = -1) \ \vee \ \big(b = c = 0 \ \wedge \ a^2 = d^2 = 1\big) \big)$$

8. a) Man zeige, daß für quadratische Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

   (i) $(A+B)^2 = A^2 + 2\,A\,B + B^2$.

   (ii) $(A-B)^2 = A^2 - 2\,A\,B + B^2$.

   (iii) $(A+B)\,(A-B) = A^2 - B^2$.

   (iv) $A\,B = B\,A$.

   b) Man entscheide mit Hilfe von a), unter welcher Bedingung an ihre Koeffizienten für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_2 & a \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} c & d_1 \\ d_2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

   die drei „binomischen Formeln“ gelten.

Abgabe bis Freitag, den 11. November 2011, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).