MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Klausur
08.10.2013

Klausur zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“

1. a) Man zeige, daß die Relation
$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \cos^2 x + \sin^2 y = 1\right\}$$
eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{R}$ ist, und bestimme die Äquivalenzklasse $\overline{0}$ des Elements $0 \in \mathbb{R}$. (3)

   b) Man zeige, daß
$$M = \left\{\frac{x-1}{x+1} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}_0^+\right\}$$
eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, und bestimme ihr Infimum und ihr Supremum; besitzt M ein Minimum bzw. ein Maximum? (3)

2. a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein (endlicher) Wahrscheinlichkeitsraum. Man erläutere die Bedeutung von Ω und $\mathcal{A}$ für das zugrundeliegende Zufallsexperiment und gebe die drei definierenden Eigenschaften von P an. (3)

   b) In einem Deck aus 52 Karten treten die vier Farben ♠, ♡, ♢, ♣ in den 13 Werten 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A auf. Das Kartendeck wird gemischt und die oberen zwölf Karten nacheinander aufgedeckt. Man bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   - A: „Alle vier Könige werden aufgedeckt.“
   - B: „Alle aufgedeckten Karten haben verschiedene Werte.“
   - C: „Die achte aufgedeckte Karte ist das erste Herz.“

   Es genügt, die gesuchten Wahrscheinlichkeiten als Produkte von Brüchen und Binomialkoeffizienten anzugeben; eine explizite Berechnung ist nicht erforderlich. (3)

3. a) Man zeige, daß ein beliebiges Dreieck ΔABC (mit den üblichen Bezeichnungen für die Seitenlängen und Innenwinkel) den Flächeninhalt
$$F = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$
besitzt. (2)

   b) Für zwei Punktmengen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ der Anschauungsebene definiere man den Begriff „$\mathcal{M}$ ist kongruent zu $\mathcal{M}'$“ und formuliere zwei Kriterien für die Kongruenz zweier Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$. (2)

c) Für zwei Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ beweise oder widerlege man die folgenden Implikationen:

- Sind die Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ kongruent, so besitzen sie den gleichen Flächeninhalt.
- Besitzen die Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ den gleichen Flächeninhalt, so sind sie kongruent.

(2)

4. a) Seien a, $b \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ fest gewählt. Man gebe eine geometrische Interpretation der Abbildungen

$$f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}, \quad f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z + b \quad \text{und} \quad f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto a\,z$$

in der Gaußschen Zahlenebene. (2)

b) Man bestimme alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$\left(z^2 + 2\,z\right)^2 + 7 \cdot \left(z^2 + 2\,z\right) = 30. \qquad (2)$$

c) Man formuliere den Fundamentalsatz der Algebra und entscheide (mit Begründung), ob es ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ mit $\mathrm{Grad}(p) = 2013$ ohne reelle Nullstelle gibt. (2)