MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 13
15.07.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“

49. Für ein $a \in \mathbb{C}$ betrachte man das Polynom $p = X^4 + a^4 \in \mathbb{C}[X]$.

    a) Man bestimme alle komplexen Nullstellen von p samt ihren Vielfachheiten und gebe damit die Faktorisierung von p über $\mathbb{C}$ an. Ferner leite man daraus im Falle $a \in \mathbb{R}$ die Faktorisierung von $p \in \mathbb{R}[X]$ über $\mathbb{R}$ her.

    b) Man zerlege p mit Hilfe binomischer Formeln in ein Produkt quadratischer Polynome und leite daraus die Faktorisierung in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$ ab.

50. Man betrachte das Polynom $p = X^5 + 2\,X^4 + 6\,X^3 - 22\,X^2 + 13\,X \in \mathbb{R}[X]$ mit der komplexen Nullstelle $z = -2 - 3\,i$. Man leite daraus die Darstellung

$$p = (X - x_1)^{e_1} \cdot (X - x_2)^{e_2} \cdot q^f$$

    mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R}[X]$ ohne reelle Nullstelle sowie $e_1, e_2, f \in \mathbb{N}$ ab.

51. Sei $p \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom mit $\mathrm{Grad}(p) = n \in \mathbb{N}_0$ mit der zugehörigen Polynomabbildung $f_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sowie $a \in \mathbb{C}$. Man zeige, daß die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{C} \mid f_p(x) = a\}$$

    höchstens n Elemente besitzt oder $M = \mathbb{C}$ gilt.

52. Man betrachte ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ mit

$$p = X^4 + a_3\,X^3 + a_2\,X^2 + a_1 X + a_0.$$

    Man zeige: es gibt $k \in \mathbb{R}$ und $q = X^4 + b_2\,X^2 + b_1\,X + b_0 \in \mathbb{R}[X]$ mit

$$p(X) = q(X + k).$$