MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 12
08.07.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“

45. a) Für die beiden Polynome

$$p = 4\,X^4 + 9\,X^3 + 2\,X^2 \quad \text{und} \quad q = 4\,X^3 + X^2 \in \mathbb{R}[X]$$

bestimme man $p + q$, $p - q$, $p \cdot q$ und $p : q$.

b) Man bestimme für das Polynom $p = X^5 + X^4 + 16\,X + 16 \in \mathbb{C}[X]$ alle komplexen Nullstellen und gebe p als Produkt von Linearfaktoren an.

46. a) Man führe im Polynomring $\mathbb{R}[X]$ für

$$(X^3 + X^2) : (X^2 - 1) \qquad \text{und} \qquad (X^3 - X^2 - 2\,X + 3) : (X - 2)$$

jeweils die Polynomdivision mit Rest durch.

b) Man interpretiere die Ergebnisse von a) für die Graphen der beiden Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2\,x + 3}{x - 2}.$$

47. a) Man faktorisiere die beiden Polynome $p = X^4 - 1$ und $q = X^6 - 1$ über $\mathbb{R}$ bzw. über $\mathbb{C}$ so weit wie möglich.

b) Man führe im Polynomring $\mathbb{R}[X]$ für die beiden Polynome

$$\begin{aligned} p &= X^4 + X^3 - X^2 + X + 2 \\ q &= X^3 + 2\,X^2 + 2\,X + 1 \end{aligned}$$

den euklidischen Algorithmus als fortgesetzte Polynomdivision mit Rest durch und bestimme so einen größten gemeinsamen Teiler von p und q.

48. Es seien a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Man zeige:

a) Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit dem Graphen $G_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt:

- Der Graph G_f ist genau dann achsensymmetrisch zur Geraden $x = x_0$, wenn $f(x_0 - x) = f(x_0 + x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- Der Graph G_f ist genau dann punktsymmetrisch zum Punkt (x_0, y_0), wenn $f(x_0 - x) + f(x_0 + x) = 2\,y_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Der Graph G_p der Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, zweiten Grades ist achsensymmetrisch zur Geraden $x = -\frac{b}{2\,a}$.

c) Der Graph G_q der Polynomfunktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$, dritten Grades ist punktsymmetrisch zum Punkt $\big(-\frac{b}{3\,a}, q(-\frac{b}{3\,a})\big)$.