MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 9
17.06.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“

33. Man zeige, daß die beiden Mengen

$$M_1 = \left\{(-1)^n + \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, und bestimme jeweils Infimum und Supremum. Handelt es sich hierbei sogar um ein Minimum bzw. ein Maximum?

34. Für nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen M und N von $\mathbb{R}$ zeige man:

   a) Für $M \subseteq N$ gilt $\sup M \leq \sup N$.

   b) Es ist $M \cup N$ nach oben beschränkt mit $\sup(M \cup N) = \max\{\sup M, \sup N\}$.

35. a) Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

$$a_n = \frac{2}{n^2 - 1} \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{n}{n-1}.$$

   b) Man zeige, daß die Menge

$$M = \{\sqrt{a_n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \geq 2\}$$

   eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, und bestimme Infimum und Supremum. Handelt es sich hierbei sogar um ein Minimum bzw. ein Maximum?

36. a) Man zeige $n^3 \leq 3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und folgere daraus, daß die Menge

$$M = \left\{ \sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

   ein Minimum und ein Maximum besitzt.

   b) Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ und $m, n \in \mathbb{N}$ zeige man $\big(m \leq n \iff \sqrt[m]{a} \geq \sqrt[n]{a}\big)$. Welche Beziehung läßt sich für $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < 1$ ableiten?