MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 2
29.04.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“

5. Man betrachte die rationale Zahl $q = \frac{720}{1250} \in \mathbb{Q}$.
   a) Man bestimme die Primfaktorzerlegung von $z = 720$ sowie von $n = 1250$.
   b) Man bestimme mit Hilfe von a) die Darstellung q mit verschiedenen Primzahlen und ganzzahligen Exponenten.
   c) Man finde eine Darstellung von q in der Form
   $$q = p^e \cdot \frac{z_0}{n_0} \qquad \text{mit} \quad e \in \mathbb{Z} \quad \text{sowie} \quad p \nmid z_0 \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad p \nmid n_0 \in \mathbb{N},$$
   und gebe für jedes auftretende p die Vielfachheit e von p in q an.

6. Gemäß der Vorlesung sind auf der Menge $\mathbb{Q} = \{z/n \mid z \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$ durch
   $$\begin{aligned} z_1/n_1 + z_2/n_2 &= (z_1 \cdot n_2 + z_2 \cdot n_1)/(n_1 \cdot n_2) \\ z_1/n_1 \cdot z_2/n_2 &= (z_1 \cdot z_2)/(n_1 \cdot n_2) \end{aligned}$$
   eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ wohldefiniert. Man rechne für den Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ die beiden Assoziativgesetze nach.

7. In der Anschauungsebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind der Einheitskreis
   $$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$
   sowie die Gerade
   $$G_m = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = m \cdot x + m\}$$
   gegeben; dabei ist $m \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Man zeige:
   a) K und G_m schneiden sich außer im Punkt $(-1, 0)$ noch in einem weiteren Punkt $P_m = (x_m, y_m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
   b) Es gilt: $\quad m \in \mathbb{Q} \iff P_m \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

8. Auf der Menge $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen betrachte man die Relation
   $$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid \tfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}\right\}.$$
   a) Man zeige, daß R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^+$ ist.
   b) Man entscheide, welche der Verknüpfungen
   $$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b} \qquad \text{und} \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$$
   mit Äquivalenzklassen $\overline{a}$ und $\overline{b}$ bezüglich R wohldefiniert ist, und begründe die Entscheidung.