MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 11
01.07.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Lösungsvorschlag —

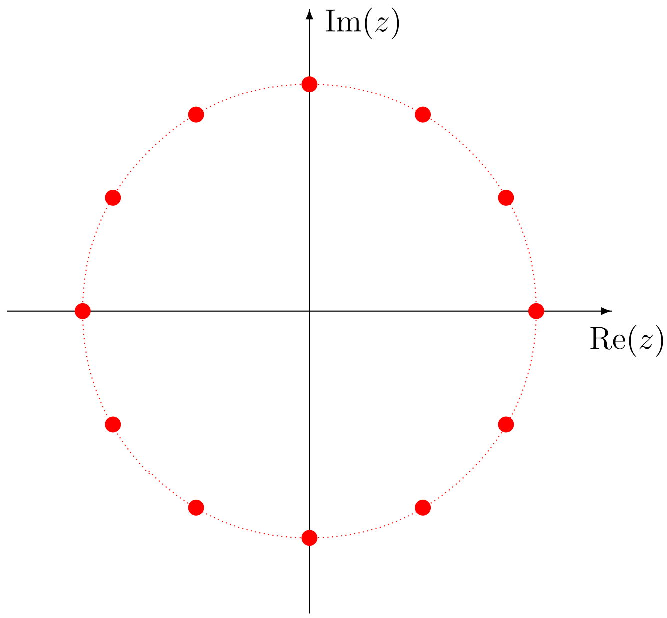
41. a) Die gegebene Menge $M = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ enthält wegen

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^k = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)^k = (E(30^\circ))^k = E(k \cdot 30^\circ)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ genau die zwölften Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ mit

$$\begin{array}{rclcl}
\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^1 & = & E(30^\circ) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i \\
\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2 & = & E(60^\circ) & = & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \\
\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3 & = & E(90^\circ) & = & i \\
\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^4 & = & E(120^\circ) & = & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \\
\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^5 & = & E(150^\circ) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i \\
\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6 & = & E(180^\circ) & = & -1 \\
\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^7 & = & E(210^\circ) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i \\
\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^8 & = & E(240^\circ) & = & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \\
\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^9 & = & E(270^\circ) & = & -i \\
\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{10} & = & E(300^\circ) & = & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \\
\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{11} & = & E(330^\circ) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i \\
\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} & = & E(360^\circ) & = & 1,
\end{array}$$

und wir erhalten die folgende Skizze in der Gaußschen Zahlenebene:



b) Die fünften Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ sind

$$E\left(k \cdot \frac{360^\circ}{5}\right) = E\left(k \cdot 72^\circ\right) \qquad \text{mit} \qquad k \in \{0,1,2,3,4\}\,;$$

für die benötigten Werte von Cosinus und Sinus gilt gemäß Aufgabe 29 b) auf Übungsblatt 8 zunächst

$$\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

und über $\sin^2 72^\circ + \cos^2 72^\circ = 1$ ergibt sich

$$\sin^2 72^\circ = 1 - \cos^2 72^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

und wegen $\sin 72^\circ > 0$ damit

$$\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Mit Hilfe der Beziehungen für den doppelten Winkel erhalten wir ferner

$$\cos 144^\circ = 1 - 2\sin^2 72^\circ = 1 - 2 \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{8} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

und

$$\sin 144^\circ = 2 \sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

so daß sich schließlich

$$\begin{aligned}
\cos 216° &\underset{180°\pm 36°}{=} \cos 144° = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \\
\sin 216° &\underset{180°\pm 36°}{=} -\sin 144° = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}
\end{aligned}$$

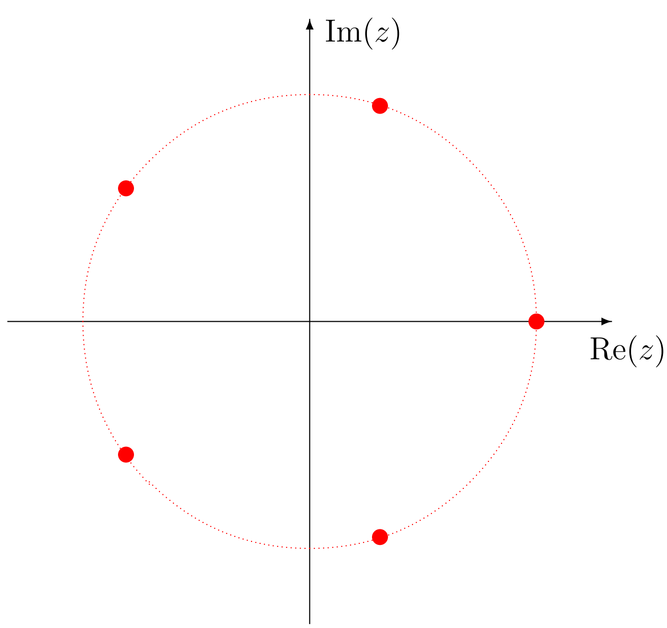
und

$$\begin{aligned}
\cos 288° &\underset{360°-72°}{=} \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\
\sin 288° &\underset{360°-72°}{=} -\sin 72° = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}
\end{aligned}$$

ergibt. Für die fünften Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
E(0°) &= 1, \\
E(72°) &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \\
E(144°) &= -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\
E(216°) &= -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\
E(288°) &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.
\end{aligned}$$

und die folgende Skizze in der Gaußschen Zahlenebene:



42. Die Gleichung $z^3 = 4\sqrt{2}\cdot(-1+i)$ besitzt wegen

$$\begin{aligned} z^3 = 4\sqrt{2}\cdot(-1+i) \quad &\Longleftrightarrow \quad z^3 = 8\cdot E(135^\circ) \\ &\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[3]{8}\cdot E\left(\frac{135^\circ}{3}\right)\cdot E\left(k\cdot\frac{360^\circ}{3}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad z = 2\cdot E(45^\circ)\cdot E(k\cdot 120^\circ) \end{aligned}$$

mit $k \in \{0,1,2\}$ in $\mathbb{C}$ genau die drei verschiedenen Lösungen

$$z_1 = 2\cdot E(45^\circ)\cdot E(0^\circ) = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\cdot 1 = \sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$$

sowie

$$\begin{aligned} z_2 = 2\cdot E(45^\circ)\cdot E(120^\circ) \quad &= \quad 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) \\ &= \quad \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\,i \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} z_3 = 2\cdot E(45^\circ)\cdot E(240^\circ) \quad &= \quad 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) \\ &= \quad \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\,i. \end{aligned}$$

Ferner besitzt die Gleichung $z^4 = 1+\sqrt{3}\,i$ wegen

$$\begin{aligned} z^4 = 1+\sqrt{3}\,i \quad &\Longleftrightarrow \quad z^4 = 2\cdot E(60^\circ) \\ &\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{2}\cdot E\left(\frac{60^\circ}{4}\right)\cdot E\left(k\cdot\frac{360^\circ}{4}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{2}\cdot E(15^\circ)\cdot E(k\cdot 90^\circ) \end{aligned}$$

mit $k \in \{0,1,2,3\}$ in $\mathbb{C}$ genau die vier verschiedenen Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 = \sqrt[4]{2}\cdot E(15^\circ)\cdot E(0^\circ) \quad &= \quad \sqrt[4]{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\,i\right)\cdot 1 \\ &= \quad \sqrt[4]{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\,i\right) \\ z_2 = \sqrt[4]{2}\cdot E(15^\circ)\cdot E(90^\circ) \quad &= \quad \sqrt[4]{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\,i\right)\cdot i \\ &= \quad \sqrt[4]{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\,i\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_3 = \sqrt[4]{2} \cdot E(15^\circ) \cdot E(180^\circ) &= \sqrt[4]{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\, i \right) \cdot (-1) \\
&= \sqrt[4]{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\, i \right) \\
z_4 = \sqrt[4]{2} \cdot E(15^\circ) \cdot E(270^\circ) &= \sqrt[4]{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\, i \right) \cdot (-i) \\
&= \sqrt[4]{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\, i \right)
\end{aligned}
$$

Die Werte für $\cos 15^\circ$ und $\sin 15^\circ$ können mit Hilfe der Additionstheoreme

$$
\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
$$

sowie

$$
\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
$$

bestimmt werden.

43. a) Die Gleichung $z^8 + 1 + i\sqrt{3} = 0$ besitzt wegen

$$
\begin{aligned}
z^8 + 1 + i\sqrt{3} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad z^8 = -1 - i\sqrt{3} \\
&\Longleftrightarrow \quad z^8 = 2 \cdot E(240^\circ) \\
&\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[8]{2} \cdot E\left(\frac{240^\circ}{8}\right) \cdot E\left(k \cdot \frac{360^\circ}{8}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[8]{2} \cdot E(30^\circ) \cdot E(k \cdot 45^\circ)
\end{aligned}
$$

mit $k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ genau acht verschiedenen Lösungen in $\mathbb{C}$.

b) Die Lösungen der obigen Gleichung, die sich im ersten Quadranten befinden sind $z = \sqrt[8]{2} \cdot E(30^\circ) \cdot E(k \cdot 45^\circ)$ für $k = 0$ und $k = 1$. Damit erhalten wir die beiden entsprechenden Lösungen

$$
z = \sqrt[8]{2} \cdot E(30^\circ) \cdot E(0^\circ) = \sqrt[8]{2} \cdot E(30^\circ) \cdot 1 = \sqrt[8]{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i \right)
$$

und

$$
\begin{aligned}
z = \sqrt[8]{2} \cdot E(30^\circ) \cdot E(45^\circ) &= \sqrt[8]{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i \right) \\
&= \sqrt[8]{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\, i + \frac{\sqrt{2}}{4}\, i - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \\
&= \sqrt[8]{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) i \right).
\end{aligned}
$$

44. a) Wir betrachten die komplexen Zahlen z, $w \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ und $w \neq 0$ sowie der Eigenschaft $(\Diamond)$: $|z+w| = |z| + |w|$. Für

$$z = |z| \cdot E(\varphi) \qquad \text{und} \qquad w = |w| \cdot E(\psi)$$

mit $0° \leq \varphi < 360°$ und $0° \leq \psi < 360°$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
(\Diamond) \quad &\Longrightarrow \quad |z+w|^2 = (|z|+|w|)^2 \\
&\Longrightarrow \quad (z+w)\cdot(\overline{z+w}) = |z|^2 + 2\cdot|z|\cdot|w| + |w|^2 \\
&\Longrightarrow \quad (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w}) = |z|^2 + 2\cdot|z|\cdot|w| + |w|^2 \\
&\Longrightarrow \quad z\cdot\overline{z} + z\cdot\overline{w} + w\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{w} = |z|^2 + 2\cdot|z|\cdot|w| + |w|^2 \\
&\Longrightarrow \quad |z|^2 + z\cdot\overline{w} + w\cdot\overline{z} + |w|^2 = |z|^2 + 2\cdot|z|\cdot|w| + |w|^2 \\
&\Longrightarrow \quad z\cdot\overline{w} + w\cdot\overline{z} = 2\cdot|z|\cdot|w| \\
&\Longrightarrow \quad |z|\cdot E(\varphi)\cdot|w|\cdot E(-\psi) + |w|\cdot E(\psi)\cdot|z|\cdot E(-\varphi) = 2\cdot|z|\cdot|w| \\
&\Longrightarrow \quad |z|\cdot|w|\cdot(E(\varphi-\psi) + E(\psi-\varphi)) = 2\cdot|z|\cdot|w| \\
&\underset{z,w\neq 0}{\Longrightarrow} \quad E(\varphi-\psi) + E(\psi-\varphi) = 2 \\
&\Longrightarrow \quad (\cos(\varphi-\psi) + i\cdot\sin(\varphi-\psi)) + \\
&\qquad\qquad + (\cos(\psi-\varphi) + i\cdot\sin(\psi-\varphi)) = 2 \\
&\Longrightarrow \quad (\cos(\varphi-\psi) + \cos(\psi-\varphi)) + i\cdot(\sin(\psi-\varphi) + \sin(\varphi-\psi)) = 2 \\
&\underset{(*)}{\Longrightarrow} \quad 2\cdot\cos(\varphi-\psi) = 2 \\
&\Longrightarrow \quad \cos(\varphi-\psi) = 1 \\
&\Longrightarrow \quad \varphi-\psi = k\cdot 360° \quad \text{für ein} \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Longrightarrow \quad \varphi-\psi = 0° \\
&\Longrightarrow \quad \varphi = \psi.
\end{aligned}$$

Bei $(*)$ gehen die beiden Beziehungen

$$\cos(\varphi-\psi) = \cos(\psi-\varphi) \quad \text{und} \quad \sin(\varphi-\psi) = -\sin(\psi-\varphi)$$

ein.

b) Wir bestimmen alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z+\overline{z}+|z| = 0$. Diese Gleichung ist für $z = 0 \in \mathbb{C}$ erfüllt, wir bestimmen nun alle weiteren komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, die die obige Gleichung erfüllen. Sei dazu $0 \neq z = x+i\,y$. Damit erhalten wir

$$z+\overline{z}+|z| = 0 \iff 2\,x + \sqrt{x^2+y^2} = 0.$$

Für $0 \neq z \in \mathbb{C}$ ist $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}^+$, weswegen $2\,x \in \mathbb{R}^-$ bzw. $x \in \mathbb{R}^-$ gelten muß, und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
2\,x + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \iff \sqrt{x^2+y^2} = -2\,x \iff x^2+y^2 = 4\,x^2 \\
\iff y^2 = 3\,x^2 \iff y = \pm\sqrt{3}\,x.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt die Lösungsmenge

$$\left\{x \pm i\,\sqrt{3}\,x \mid x \in \mathbb{R}_0^-\right\} = \left\{x\cdot\left(1 \pm i\,\sqrt{3}\right) \mid x \in \mathbb{R}_0^-\right\}.$$