MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 10
24.06.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Lösungsvorschlag —

37. a) Die quadratische Gleichung $x^2+2\,x+a=0$ mit reellen Koeffizienten besitzt die Diskriminante $\Delta = b^2 - 4\,a\,c = 4\cdot(1-a)$ und damit die Lösungen

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{\Delta}}{2} \iff x = \frac{-2\pm\sqrt{4\cdot(1-a)}}{2} \iff x = -1\pm\sqrt{1-a},$$

woraus folgende Fallunterscheidung resultiert:

- Im Fall $a<1$ erhalten wir wegen $\Delta>0$ die beiden reellen Lösungen

$$x_1 = -1+\sqrt{1-a} \quad \text{oder} \quad x_2 = -1-\sqrt{1-a}.$$

Damit ergibt sich für den quadratischen Term die Faktorisierung

$$x^2+2\,x+a = \left(x-\left(-1+\sqrt{1-a}\right)\right)\cdot\left(x-\left(-1-\sqrt{1-a}\right)\right).$$

- Im Fall $a=1$ erhalten wir wegen $\Delta=0$ die (doppelte) reelle Lösung $x_0=-1$. Damit ergibt sich für den quadratischen Term die Faktorisierung

$$x^2+2\,x+1 = (x+1)^2$$

- Im Falle $a>1$ erhalten wir wegen $\Delta<0$ die beiden konjugiert–komplexen Lösungen

$$x_1 = -1+i\sqrt{a-1} \quad \text{oder} \quad x_2 = -1-i\sqrt{a-1},$$

Damit ergibt sich für den quadratischen Term die Faktorisierung

$$x^2+2\,x+a = \left(x-\left(-1+i\sqrt{a-1}\right)\right)\cdot\left(x-\left(-1-i\sqrt{a-1}\right)\right).$$

b) Wir führen die Gleichung

$$\left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)^2 + 6\cdot\left(\frac{z^2+1}{z+1}\right) + 8 = 0$$

mit Hilfe der Substitution $u = \dfrac{z^2+1}{z+1}$ in die quadratische Gleichung $u^2+6\,u+8=0$ über; diese besitzt wegen

$$u^2+6\,u+8=0 \iff (u+2)\cdot(u+4)=0 \iff (u=-2 \ \text{ oder } \ u=-4)$$

die beiden Lösungen $u = -2$ und $u = -4$. Durch Resubstitution erhalten für die gegebene Gleichung die Lösungen

$$\frac{z^2+1}{z+1} = -2 \iff z^2+1 = -2\,(z+1) \iff z^2+2\,z+3 = 0 \iff$$
$$\iff z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = -1 \pm i\cdot\sqrt{2}$$

und

$$\frac{z^2+1}{z+1} = -4 \iff z^2+1 = -4\,(z+1) \iff z^2+4\,z+5 = 0 \iff$$
$$\iff z = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i$$

und damit die Lösungsmenge $L = \left\{-1 \pm i\cdot\sqrt{2},\ -2 \pm i\right\}$.

38. a) Die Menge $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < 2\}$ beschreibt in der Gaußschen Zahlenebene die offene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt i bzw. $(0,1)$ und dem Radius 2.

b) Die Menge $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-1| < 3\}$ beschreibt in der Gaußschen Zahlenebene den offenen Kreisring um den Mittelpunkt 1 bzw. $(1,0)$ mit dem inneren Radius 1 und dem äußeren Radius 3.

c) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z = a + i\cdot b$ erhalten wir

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+i\cdot b} = \frac{1}{a+i\cdot b}\cdot\frac{a-i\cdot b}{a-i\cdot b} = \frac{a-i\cdot b}{a^2-i^2\cdot b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\cdot\frac{-b}{a^2+b^2}$$

und damit

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2} \iff \frac{a}{a^2+b^2} < \frac{1}{2} \iff 2\,a < a^2+b^2 \iff$$
$$\iff a^2 - 2\,a + b^2 > 0 \underset{\text{quadr. Erg.}}{\iff} \left(a^2 - 2\,a + 1\right) + b^2 > 1 \iff$$
$$\iff (a-1)^2 + b^2 > 1 \iff |z-1|^2 > 1 \iff |z-1| > 1.$$

Folglich beschreibt die Menge $M_3 = \left\{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \mid \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}\right\}$ in der Gaußschen Zahlenebene das Äußere des Kreises mit dem Mittelpunkt 1 bzw. $(1,0)$ und dem Radius 1.

d) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a + i\cdot b$ erhalten wir

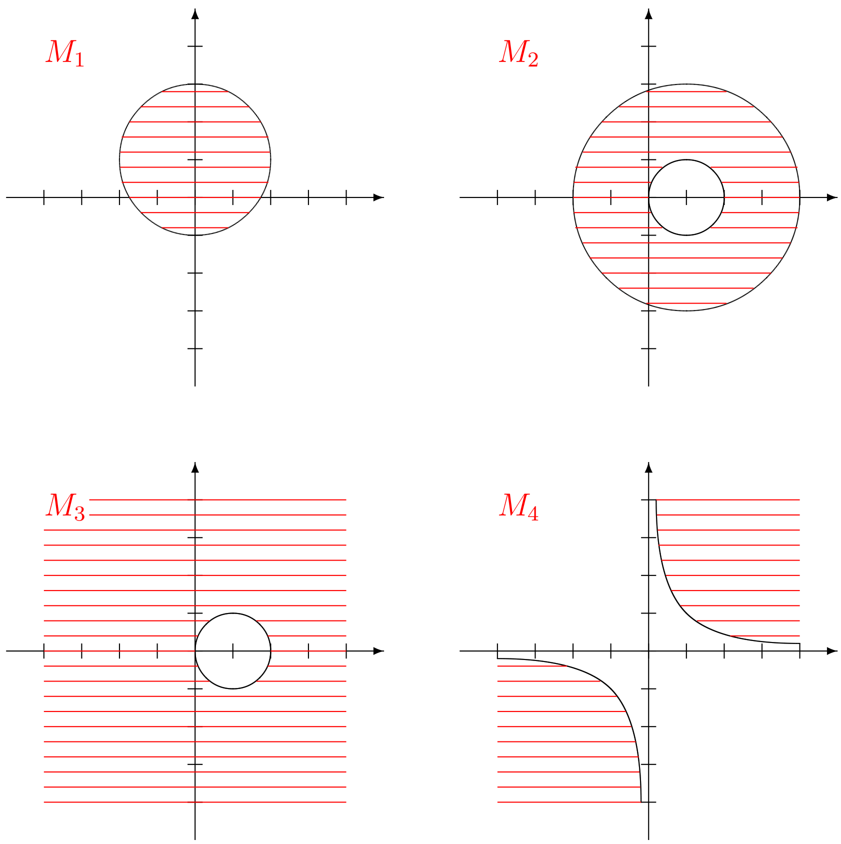
$$z^2 = (a+i\cdot b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot i + b^2\cdot i^2 = a^2 - b^2 + i\cdot 2\,a\,b$$

und damit

$$\operatorname{Im}(z^2) > 2 \iff 2\,a\,b > 2 \iff a\,b > 1 \iff \begin{cases} b > \frac{1}{a}, & \text{für} \quad a > 0, \\ b < \frac{1}{a}, & \text{für} \quad a < 0. \end{cases}$$

Folglich beschreibt die Menge $M_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) > 2\}$ in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller Punkte oberhalb des Hyperbelastes $b = \frac{1}{a}$ mit $a > 0$ sowie unterhalb des Hyperbelastes $b = \frac{1}{a}$ mit $a < 0$.

Damit ergeben sich die folgenden Skizzen:



39. a) Für alle z, $w \in \mathbb{C}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)\cdot(\overline{z+w}) + (z-w)\cdot(\overline{z-w}) \\
&= (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w}) + (z-w)\cdot(\overline{z}-\overline{w}) \\
&= (z\cdot\overline{z} + z\cdot\overline{w} + w\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{w}) + \\
&\qquad\qquad + (z\cdot\overline{z} - z\cdot\overline{w} - w\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{w}) \\
&= 2\cdot(z\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{w}) \\
&= 2\cdot\left(|z|^2 + |w|^2\right)
\end{aligned}$$

die gewünschte Parallelogrammgleichung. Die Punkte 0, z, w und $z+w$ bilden in der Gaußschen Zahlenebene ein Parallelogramm; dabei ist $z+w$ die Länge der Diagonalen von 0 bis $z+w$, $z-w$ die Länge der Diagonalen von z bis w, z bzw. w die Längen der beiden Seiten. Die Parallelogrammgleichung zeigt, daß die Quadrate über den beiden Diagonalen eines Parallelogramms zusammen denselben Flächeninhalt besitzen wie Quadrate über seinen vier Seiten.

b) Wir betrachten die beiden verschiedenen komplexen Zahlen u und w und bestimmen die komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, für die $|u-z|^2 + |w-z|^2$ minimal ist. Mit Hilfe der in a) gezeigten Parallelogrammgleichung erhalten wir

$$2\cdot\left(|u-z|^2 + |w-z|^2\right) = |(u-z)+(w-z)|^2 + |(u-z)-(w-z)|^2$$

und folglich

$$|u-z|^2+|w-z|^2=\frac{1}{2}\cdot\bigl(|u+w-2\,z|^2+|u-w|^2\bigr)\geq\frac{1}{2}\cdot|u-w|^2.$$

Damit ist $|u-z|^2+|w-z|^2$ genau dann minimal, wenn $\frac{1}{2}\cdot|u+w-2\,z|^2=0$ gilt, und wir erhalten

$$\frac{1}{2}\cdot|u+w-2\,z|^2=0\iff u+w-2\,z=0\iff z=\frac{u+w}{2}.$$

40. a) Wir betrachten die Abbildung

$$f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C},\quad f(z)=\frac{|z|}{z}+\frac{|z|}{\overline{z}}.$$

Für $z=x+i\cdot y$ mit $z\neq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}f(z)=\frac{|z|}{z}+\frac{|z|}{\overline{z}}=\frac{|z|\cdot\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}+\frac{|z|\cdot z}{\overline{z}\cdot z}=\frac{|z|\cdot\overline{z}+|z|\cdot z}{z\cdot\overline{z}}=|z|\cdot\frac{z+\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\\=|z|\cdot\frac{(x+i\cdot y)+(x-i\cdot y)}{|z|^2}=\frac{2\,x}{|z|}=\frac{2\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Wegen $\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{x^2}=|x|$ erhalten wir für $x\neq 0$

$$|f(z)|=\left|\frac{2\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{2\,|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{2\,|x|}{|x|}=2;$$

ferner ist für $x=0$ schon $f(z)=0$, weswegen $W_f\subseteq[-2;2]_{\mathbb{R}}$ gilt.
Wir zeigen nun „$\supseteq$“, d.h. daß f jeden Wert von $[-2;2]_{\mathbb{R}}$ tatsächlich annimmt; sei dazu $r\in[-2;2]_{\mathbb{R}}$, und wir haben also ein $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $f(z)=r$ zu finden. Für $r\neq 0$ wählen wir $x=r$ und erhalten damit notwendigerweise

$$\begin{aligned}f(z)=\frac{2\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}\implies r=\frac{2\,r}{\sqrt{r^2+y^2}}\implies\\\implies 2=\sqrt{r^2+y^2}\implies 4=r^2+y^2\implies y=\sqrt{4-r^2}.\end{aligned}$$

Die Probe bestätigt

$$f\left(r+i\cdot\sqrt{4-r^2}\right)=\frac{2\,r}{\sqrt{r^2+(4-r^2)}}=\frac{2\,r}{2}=r,$$

welche auch für $r=0$ gültig ist; damit ist $r\in W_f$ und somit $W_f=[-2;2]_{\mathbb{R}}$.

b) Wir zeigen für alle komplexen Zahlen z und w die Beziehung

$$\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}\,z}\right|=1\implies\bigl(|w|=1\quad\text{oder}\quad|z|=1\bigr).$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}\,z}\right| = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{|z-w|}{|1-\overline{w}\,z|} = 1 \\
&\Longrightarrow \quad |z-w| = |1-\overline{w}\,z| \\
&\Longrightarrow \quad |z-w|^2 = |1-\overline{w}\,z|^2 \\
&\Longrightarrow \quad (z-w)\cdot(\overline{z-w}) = (1-\overline{w}\,z)\cdot\big(\overline{1-\overline{w}\,z}\big) \\
&\Longrightarrow \quad (z-w)\cdot(\overline{z}-\overline{w}) = (1-\overline{w}\,z)\cdot(1-w\,\overline{z}) \\
&\Longrightarrow \quad z\,\overline{z} - z\,\overline{w} - w\,\overline{z} + w\,\overline{w} = 1 - w\,\overline{z} - \overline{w}\,z + w\,\overline{w}\,z\,\overline{z} \\
&\Longrightarrow \quad |z|^2 + |w|^2 = 1 + |w|^2\,|z|^2 \\
&\Longrightarrow \quad 0 = 1 - |w|^2 - |z|^2 + |w|^2\,|z|^2 \\
&\Longrightarrow \quad 0 = \big(1-|w|^2\big) - |z|^2\cdot\big(1-|w|^2\big) \\
&\Longrightarrow \quad 0 = \big(1-|w|^2\big)\cdot\big(1-|z|^2\big) \\
&\Longrightarrow \quad \big(1-|w|^2 = 0 \quad \text{oder} \quad 1-|z|^2 = 0\big) \\
&\Longrightarrow \quad \big(|w|^2 = 1 \quad \text{oder} \quad |z|^2 = 1\big) \\
&\Longrightarrow \quad (|w| = 1 \quad \text{oder} \quad |z| = 1)\,.
\end{aligned}
$$