MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 9
17.06.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Lösungsvorschlag —

33. a) Für die Elemente der Menge $M_1 = \left\{ \frac{n!}{n^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ erhalten wir

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{n}}_{\leq 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n} \leq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; folglich ist M_1 (etwa durch 0) nach unten sowie (etwa durch 1) nach oben beschränkt, wobei wegen $1 = \frac{1!}{1^1} \in M_1$ schon $\sup M_1 = 1$ ist. Für alle $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$; damit ergibt sich

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} < b,$$

so daß b keine untere Schranke von M_1 sein kann. Folglich ist 0 die größte untere Schranke von M_1, also $\inf M_1 = 0$.
Wegen $\sup M_1 = 1 \in M_1$ gilt schon $\sup M_1 = \max M_1$; wegen $\frac{n!}{n^n} \neq 0$ ist aber $\inf M_1 = 0 \notin M_1$, so daß M_1 kein Minimum besitzt.

b) Für die Elemente der Menge $M_2 = \left\{ 2 - \frac{(-1)^n}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ erhalten wir:

- für $n \in \mathbb{N}$ gerade ist $2 - \frac{(-1)^n}{n^2} = 2 - \frac{1}{n^2}$ und damit $\frac{7}{4} \leq 2 - \frac{1}{n^2} \leq 2$,
- für $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist $2 - \frac{(-1)^n}{n^2} = 2 + \frac{1}{n^2}$ und damit $2 \leq 2 + \frac{1}{n^2} \leq 3$.

Insbesondere gilt also $\frac{7}{4} \leq 2 - \frac{(-1)^n}{n^2} \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$; folglich ist M_2 (etwa durch $\frac{7}{4}$) nach unten sowie (etwa durch 3) nach oben beschränkt, wobei wegen $3 = 2 - \frac{(-1)^1}{1^2} \in M_2$ schon $\sup M_2 = 3 = \max M_2$ und wegen $\frac{7}{4} = 2 - \frac{(-1)^2}{2^2} \in M_2$ schon $\inf M_2 = \frac{7}{4} = \min M_2$ ist.

34. a) Da die Menge M nach oben beschränkt ist, besitzt M eine kleinste obere Schranke $\sup M$; im Spezialfall $\lambda = 0$ ergibt sich

$$\lambda \cdot M = \{\lambda \cdot m \mid m \in M\} = \{0\},$$

weswegen $\lambda \cdot M$ nach oben wie nach unten beschränkt ist mit

$$\sup(\lambda \cdot M) = 0 = \lambda \cdot \sup M \quad \text{und} \quad \inf(\lambda \cdot M) = 0 = \lambda \cdot \sup M.$$

Für $\lambda > 0$ folgt für alle $m \in M$ aus $m \le \sup M$ nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation $\lambda \cdot m \le \lambda \cdot \sup M$, weswegen $\lambda \cdot M$ durch $\lambda \cdot \sup M$ nach oben beschränkt ist. Für eine beliebige obere Schranke $b \in \mathbb{R}$ von $\lambda \cdot M$ gilt

$$\lambda \cdot m \le b \qquad \text{und damit} \qquad m \le \lambda^{-1} \cdot b$$

für alle $m \in M$, so daß $\lambda^{-1} \cdot b$ eine obere Schranke von M ist; damit gilt

$$\sup M \le \lambda^{-1} \cdot b \qquad \text{und damit} \qquad \lambda \cdot \sup M \le b,$$

weswegen $\lambda \cdot \sup M$ die kleinste obere Schranke von $\lambda \cdot M$ ist, also

$$\sup(\lambda \cdot M) = \lambda \cdot \sup M.$$

Für $\lambda < 0$ folgt für alle $m \in M$ aus $m \le \sup M$ nach dem Inversionsgesetz $\lambda \cdot m \ge \lambda \cdot \sup M$, weswegen $\lambda \cdot M$ durch $\lambda \cdot \sup M$ nach unten beschränkt ist. Für eine beliebige untere Schranke $c \in \mathbb{R}$ von $\lambda \cdot M$ gilt

$$\lambda \cdot m \ge c \qquad \text{und damit} \qquad m \le \lambda^{-1} \cdot c$$

für alle $m \in M$, so daß $\lambda^{-1} \cdot c$ eine obere Schranke von M ist; damit gilt

$$\sup M \le \lambda^{-1} \cdot c \qquad \text{und damit} \qquad \lambda \cdot \sup M \ge c,$$

weswegen $\lambda \cdot \sup M$ die größte untere Schranke von $\lambda \cdot M$ ist, also

$$\inf(\lambda \cdot M) = \lambda \cdot \sup M.$$

b) Die Menge M ist durch $\sup M$ nach oben beschränkt, es ist also

$$m \le \sup M \qquad \text{für alle} \quad m \in M,$$

und die Menge N ist durch $\sup N$ nach oben beschränkt, es ist also

$$n \le \sup N \qquad \text{für alle} \quad n \in N;$$

für alle $m \in M$ und $n \in N$ folgt nach dem Monotoniegesetz der Addition

$$m + n \le \sup M + \sup N,$$

weswegen die Menge $M + N$ durch $\sup M + \sup N$ nach oben beschränkt ist mit

$$\sup(M + N) \le \sup M + \sup N.$$

Sei nun $b \in \mathbb{R}$ mit $b < \sup M + \sup N$; damit ist $c = \sup M + \sup N - b > 0$. Wegen $\sup M - \frac{c}{2} < \sup M$ ist $\sup M - \frac{c}{2}$ keine obere Schranke von M, es gibt also

$$\text{ein} \quad m_0 \in M \qquad \text{mit} \qquad m_0 > \sup M - \frac{c}{2},$$

und wegen $\sup N - \frac{c}{2} < \sup N$ ist $\sup N - \frac{c}{2}$ keine obere Schranke von N, es gibt also

$$\text{ein} \quad n_0 \in N \qquad \text{mit} \qquad n_0 > \sup N - \frac{c}{2};$$

zusammen ergibt sich

$$m_0 + n_0 > \left(\sup M - \frac{c}{2}\right) + \left(\sup N - \frac{c}{2}\right) = \sup M + \sup N - c = b,$$

weswegen b keine obere Schranke von $M + N$ sein kann.
Folglich ist $\sup M + \sup N$ die kleinste obere Schranke von $M + N$, also

$$\sup(M + N) = \sup M + \sup N.$$

35. a) Für die Elemente der Menge

$$M_1 = \left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

erhalten wir mit Hilfe der dritten binomischen Formel

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) \cdot \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$
$$= \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n-1}\right)^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}},$$

wegen

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \geq \sqrt{1+1} + \sqrt{1-1} = \sqrt{2} + \sqrt{0} = \sqrt{2}$$

insbesondere also

$$0 < \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \leq \sqrt{2} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N};$$

folglich ist M_1 (etwa durch 0) nach unten sowie (etwa durch $\sqrt{2}$) nach oben beschränkt, wobei wegen

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} - \sqrt{1-1} \in M_1$$

schon $\sup M_1 = \sqrt{2}$ ist. Für alle $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ gibt es zu $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > 0$ nach dem Archimedischen Axiom ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \left(\frac{b}{2}\right)^2$, also $\frac{2}{\sqrt{n}} < b$, und damit

$$\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} < b,$$

so daß b keine untere Schranke von M_1 sein kann; folglich ist 0 die größte untere Schranke von M_1, also $\inf M_1 = 0$.
Wegen $\sup M_1 = \sqrt{2} \in M_1$ ist $\sup M_1 = \max M_1$, und wegen $\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist aber $\inf M_1 = 0 \notin M_1$, so daß M_1 kein Minimum besitzt.

b) Für die Elemente der Menge

$$M_2 = \left\{ \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

erhalten wir

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)-1}{n+1}} = \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n+1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und wegen

$$1 > 1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

ergibt sich unter Verwendung des Monotonieverhaltens der n–ten Wurzel

$$1 = \sqrt[n]{1} > \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n+1}} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2};$$

wegen $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist M_2 (etwa durch $\frac{1}{2}$) nach unten sowie (etwa durch 1) nach oben beschränkt, wobei wegen

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt[1]{1}}{\sqrt[1]{1+1}} \in M_2$$

schon $\inf M_2 = \frac{1}{2}$ ist. Für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < c < 1$ ist $1 - c > 0$, und nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < 1 - c$, also

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n} > 1 - (1 - c) = c,$$

und damit wegen des Monotonieverhaltens der n–ten Wurzel

$$c \underset{0<c<1}{\leq} \sqrt[n]{c} < \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}},$$

so daß c keine obere Schranke von M_2 sein kann; folglich ist 1 die kleinste obere Schranke von M_2, also $\sup M_2 = 1$.
Wegen $\inf M_2 = \frac{1}{2} \in M_2$ gilt schon $\inf M_2 = \min M_2$, und wegen $\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist aber $\sup M_2 = 1 \notin M_2$, so daß M_2 kein Maximum besitzt.

36. a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ erhalten wir mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes

$$\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-k} \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^k =$$

$$= \underbrace{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}_{k=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-k} \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^k}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}_{k=n} \geq a + b$$

und folglich wegen der Monotonie der n–ten Wurzel

$$\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)^n} = \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}.$$

Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\sqrt[n]{a+b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)^n \\
&\Longleftrightarrow \quad a+b = \left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)^n \\
&\Longleftrightarrow \quad a+b = a + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-k} \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^k + b \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\binom{n}{k}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-k}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[n]{b}\right)^k}_{\geq 0} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\sqrt[n]{a} = 0 \;\text{ oder }\; \sqrt[n]{b} = 0\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(a = 0 \;\text{ oder }\; b = 0\right).
\end{aligned}$$

b) Für alle a, $b \in \mathbb{R}_0^+$ mit $a \geq b$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ erhalten wir

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{(a-b)+b} \underset{\text{a)}}{\leq} \sqrt[n]{a-b} + \sqrt[n]{b}$$

und folglich

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \leq \sqrt[n]{a-b}$$

mit

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a-b} = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a-b} + \sqrt[n]{b} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(a-b = 0 \;\text{ oder }\; b = 0\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(a = b \;\text{ oder }\; b = 0\right).
\end{aligned}$$