MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 8
10.06.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II" — Lösungsvorschlag —

29. a) In dem als gleichschenklig vorausgesetzten Dreieck ΔABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ gilt $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC = 72^\circ$ und damit $\sphericalangle ACB = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$. Für die Innenwinkel des Dreiecks ΔBDA gilt $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBA = 72^\circ$ sowie $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BAC = 36^\circ$ und damit $\sphericalangle ADB = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. Folglich besitzen die beiden Dreiecke ΔABC und ΔBDA übereinstimmende Innenwinkel und sind damit ähnlich, und es gilt

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \qquad \text{mit} \qquad \overline{AC} = s \quad \text{und} \quad \overline{AB} = b;$$

wegen $\sphericalangle ACD = 36^\circ = \sphericalangle DAC$ ist auch das Dreieck ΔCAD gleichschenklig, und es folgt $\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{AB}$, also $\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD} = s - b$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{s}{b} = \frac{b}{s-b} \quad &\Longleftrightarrow \quad s \cdot (s-b) = b^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad s^2 - b \cdot s - b^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad s = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b^2)}}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad s = \frac{b \pm b \cdot \sqrt{5}}{2} \underset{s>0}{\Longleftrightarrow} s = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot b.
\end{aligned}$$

b) Der Höhenfußpunkt H von C auf AB ist der Mittelpunkt der Seite $[AB]$, und wir erhalten das rechtwinklige Dreieck ΔCAH mit der Hypotenuse $[CA]$ der Länge s, wobei der Innenwinkel $\sphericalangle HAC = 72^\circ$ die Ankathete $[AH]$ der Länge $\frac{b}{2}$ besitzt. Damit ergibt sich nach Definition des Cosinus

$$\cos 72^\circ = \frac{\frac{b}{2}}{s} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot b} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme erhalten wir ferner

$$\cos^2 36^\circ = \cos^2 \frac{72^\circ}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 72^\circ\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}+3}{8} =$$

$$= \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+3)}{2 \cdot 8} = \frac{2 \cdot \sqrt{5} + 6}{16} = \frac{5 + 2 \cdot \sqrt{5} + 1}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2,$$

woraus schon $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ folgt.

30. a) Mit Hilfe des Cosinussatzes $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma$ erhalten wir

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\,a\,b} = \frac{9^2+24^2-21^2}{2\cdot 9\cdot 24} = \frac{1}{2}, \qquad \text{also} \qquad \gamma = 60^\circ.$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt von ΔABC

$$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot a\cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 9\cdot \sin 60^\circ = 54\sqrt{3}.$$

Wir bestimmen die Höhen von ΔABC und erhalten

- für die Höhe h_a

$$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a \iff h_a = \frac{2\cdot F_{\Delta ABC}}{a} = \frac{2\cdot 54\sqrt{3}}{9} = 12\sqrt{3},$$

- für die Höhe h_b

$$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_a \iff h_b = \frac{2\cdot F_{\Delta ABC}}{b} = \frac{2\cdot 54\sqrt{3}}{24} = \frac{9}{2}\sqrt{3},$$

- für die Höhe h_c

$$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_a \iff h_c = \frac{2\cdot F_{\Delta ABC}}{c} = \frac{2\cdot 54\sqrt{3}}{21} = \frac{36}{7}\sqrt{3}.$$

Mit Hilfe des Cosinussatzes erhalten wir für s_a die Beziehung

$$s_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot b\cdot\cos\gamma = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 24^2 - 2\cdot\frac{9}{2}\cdot 24\cdot\cos 60^\circ = \frac{1953}{4}$$

und damit $s_a = \frac{1}{2}\sqrt{1953} = \frac{3}{2}\sqrt{217}$; ebenso ergibt sich für s_b

$$s_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 - 2\cdot\frac{b}{2}\cdot a\cdot\cos\gamma = 12^2 + 9^2 - 2\cdot 12\cdot 9\cdot\cos 60^\circ = 117$$

und damit $s_b = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$. Ferner liefert der Cosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha \iff \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$$

und folglich für s_c die Beziehung

$$\begin{aligned} s_c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - 2\cdot\frac{c}{2}\cdot b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c} &= \\ = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2} &= -\frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{873}{4} \end{aligned}$$

und damit $s_c = \frac{1}{2}\sqrt{873} = \frac{3}{2}\sqrt{97}$.

b) Wir betrachten das Dreieck ΔABC mit $b = 21$ und $\beta = 60°$ sowie dem Flächeninhalt $F_{\Delta ABC} = 54\sqrt{3}$. Für den Flächeninhalt $F_{\Delta ABC}$ gilt

$$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\beta \iff 54\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin 60° \iff a \cdot c = 216.$$

Ferner erhalten wir mit Hilfe des Cosinussatzes

$$\begin{aligned} &b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \\ &\qquad\qquad \iff 21^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot \underbrace{a \cdot c}_{=216} \cdot \cos 60° \iff a^2 + c^2 = 657. \end{aligned}$$

Mit diesen beiden Beziehugen erhalten wir

$$a^2 + c^2 = 657 \underset{c=\frac{216}{a}}{\iff} a^2 + \left(\frac{216}{a}\right)^2 = 657 \iff a^4 - 657\,a^2 + 216^2 = 0.$$

Wir führen die Gleichung $a^4 - 657\,a^2 + 216^2 = 0$ durch die Substitution $u = a^2$ in die quadratische Gleichung $u^2 - 657\,u + 216^2 = 0$ über; diese besitzt wegen

$$u^2 - 657\,u + 216^2 = 0 \iff (u - 576) \cdot (u - 81) = 0$$

die beiden Lösungen $u = 567$ und $u = 81$; durch Resubstitution erhalten wir $a_1 = 24$ oder $a_2 = 9$. Wegen $c = \frac{216}{a}$ erhalten wir $c_1 = 9$ oder $c_2 = 24$

31. a) Da ein Dreieck mindestens zwei spitze Innenwinkel besitzt, können wir die Eckpunkte so bezeichnen, daß für den Innenwinkel α an der Ecke A dann $\alpha < 90°$ gilt. Der Umkreismittelpunkt M besitzt von allen Ecken des Dreiecks ΔABC denselben Abstand, es ist also $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$ mit dem Umkreisradius r. Dementsprechend sind (Ausartungsfälle eingeschlossen) die Dreiecke ΔABM, ΔBCM und ΔCAM gleichschenklig mit der Spitze M; für die gerichteten Winkel gilt im Dreieck ΔABM dann

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle MBA, \qquad \text{also} \qquad \sphericalangle AMB = 180° - 2 \cdot \sphericalangle BAM,$$

und im Dreieck ΔCAM dann

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle MAC, \qquad \text{also} \qquad \sphericalangle CMA = 180° - 2 \cdot \sphericalangle MAC,$$

so daß sich wegen

$$\alpha = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAM + \sphericalangle MAC$$

demnach

$$\begin{aligned} \sphericalangle BMC &= 360° - (\sphericalangle CMA + \sphericalangle AMB) \\ &= (180° - \sphericalangle AMB) + (180° - \sphericalangle CMA) \\ &= 2 \cdot \sphericalangle BAM + 2 \cdot \sphericalangle MAC \\ &= 2 \cdot \sphericalangle BAC = 2 \cdot \alpha \end{aligned}$$

ergibt. Der Höhenfußpunkt H von M auf BC ist nun der Mittelpunkt der Strecke $[BC]$, so daß das rechtwinklige Dreieck ΔCMH die Hypotenuse $[CM]$ der Länge r besitzt; dem Innenwinkel $\sphericalangle HMC = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BMC = \alpha$ liegt nun die Kathete $[HC]$ der Länge $\frac{a}{2}$ gegenüber, und nach der Definition von Sinus gilt

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{r} \iff 2\,r = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Mit dem Sinussatz ergibt sich insgesamt die gewünschte Beziehung

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\,r.$$

b) Wir betrachten das Dreieck ΔABC mit dem Innenwinkel $\alpha > 90°$; damit liegt A zwischen B und dem Höhenfußpunkt H von C auf AB, so daß sich für $h_c = \overline{HC}$ sowie $q = \overline{AH}$ und $q = \overline{BH}$ dann $p = c + q$ ergibt.

Nach dem Satz des Pythagoras für die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ΔBCH und ΔACH gilt $a^2 = h_c^2 + p^2$ und $b^2 = h_c^2 + q^2$; ferner gilt für den Innenwinkel $\sphericalangle CAH = 180° - \alpha$ nach Definition

$$\frac{q}{b} = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha, \qquad \text{also} \qquad q = -b \cdot \cos\alpha.$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} a^2 = h_c^2 + p^2 &= \left(b^2 - q^2\right) + p^2 = \left(b^2 - q^2\right) + (c+q)^2 = \\ &= \left(b^2 - q^2\right) + \left(c^2 + 2 \cdot c \cdot q + q^2\right) = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot q = \\ &= b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot (-b \cdot \cos\alpha) = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha. \end{aligned}$$

32. Für das Dreieck ΔABC wird generell vorausgesetzt, daß der Höhenfußpunkt H von C auf AB zwischen den Punkten A und B liegt; damit gilt $c = p + q$.

a) Unter der Voraussetzung $h^2 = p \cdot q$ ergibt sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras zum einen im rechtwinkligen Dreieck ΔBCH

$$a^2 = h^2 + p^2 = p \cdot q + p^2 = p \cdot (q + p) = p \cdot c$$

sowie zum anderen im rechtwinkligen Dreieck ΔCAH

$$b^2 = h^2 + q^2 = p \cdot q + q^2 = q \cdot (p + q) = q \cdot c.$$

b) Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras gelten für die beiden rechtwinkligen Dreieck ΔBCH und ΔCAH wiederum die Beziehungen

$$a^2 = h^2 + p^2 \quad \text{sowie} \quad b^2 = h^2 + q^2,$$

und durch Differenzbildung erhalten wir

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2 = (p+q) \cdot (p-q) = c \cdot (p-q)$$

und damit

$$a^2 - b^2 = c \cdot p - c \cdot q \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 - c \cdot p = b^2 - c \cdot q;$$

folglich sind die beiden Beziehungen $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$ gemäß

$$a^2 = c \cdot p \iff a^2 - c \cdot p = 0 \iff b^2 - c \cdot q = 0 \iff b^2 = c \cdot q$$

gleichwertig, so daß sich unter Voraussetzung der einen wie der anderen in

$$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c \cdot (p + q) = c^2.$$

das Gewünschte ergibt.

c) Für das Dreieck ΔABC gilt mit Hilfe des Cosinussatzes

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Unter der Voraussetzung $c^2 = a^2 + b^2$ folgt wegen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ in

$$2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \implies \cos\gamma = 0 \implies \gamma = 90^\circ$$

die gewünschten Beziehung.

Unter der generellen Voraussetzung $(*)$, daß der Höhenfußpunkt H von C auf AB zwischen den Punkten A und B liegt, haben wir damit folgende Aspekte gezeigt:

$$h^2 = p \cdot q \underset{\text{a)}}{\implies} \big(a^2 = c \cdot p \quad \text{und} \quad b^2 = c \cdot q\big) \implies$$
$$\implies \big(a^2 = c \cdot p \quad \text{oder} \quad b^2 = c \cdot q\big) \underset{\text{b)}}{\implies} a^2 + b^2 = c^2 \underset{\text{c)}}{\implies} \gamma = 90^\circ.$$

Damit ist unter $(*)$ jeder Satz aus der Satzgruppe des Pythagoras zur Rechtwinkligkeit des Dreiecks ΔABC mit $\gamma = 90^\circ$ gleichwertig; lediglich beim Satz des Pythagoras selbst können wir auf $(*)$ verzichten und erhalten allgemein

$$a^2 + b^2 = c^2 \iff \gamma = 90^\circ,$$

da wir in c) die Lage von H zwischen A und B nicht verwendet haben.