MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 7
03.06.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Lösungsvorschlag —

25. a) Um ein rechtwinkliges Dreieck in seiner Gestalt eindeutig festzulegen, benötigen wir neben dem rechten Innenwinkel entweder die Länge zweier Seiten oder die Länge einer Seite und einen weiteren Innenwinkel; wir wählen daher

    (i) die Längen der beiden Katheten,
    (ii) die Längen einer Kathete und der Hypotenuse,
    (iii) die Länge einer Kathete und einen spitzen Innenwinkel,
    (iv) die Länge der Hypotenuse und einen spitzen Innenwinkel.

    b) Wir erhalten dabei folgende Konstruktionsvorschriften:

    (i) Wir tragen auf einer Geraden die eine Kathetenlänge ab und errichten in dem entsprechenden Endpunkt die Lotgerade, auf der wir die andere Kathetenlänge abtragen; wir verbinden die beiden freien Endpunkte und erhalten die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks.
    (ii) Wir errichten über der Hypotenuse den Thaleskreis und schneiden ihn mit dem Kreis um den entsprechenden Endpunkt der Hypotenuse mit der Kathetenlänge als Radius; damit erhalten wir den dritten Punkt des rechtwinkligen Dreiecks.
    (iii) Wir haben hier zwei Fällen zu unterscheiden, je nachdem, ob sich die gegebene Kathetenlänge auf die Ankathete oder auf die Gegenkathete des gegebenen spitzen Innenwinkels bezieht:
        – Im ersten Fall errichten wir in einem Endpunkt der gegebenen Ankathete den gegebenen spitzen Winkel sowie im anderen Endpunkt die Lotgerade, die den freien Schenkel im dritten Punkt des rechtwinkligen Dreiecks schneidet.
        – Im zweiten Fall konstruieren wir zunächst aus dem gegebenen spitzen Innenwinkel den dritten Innenwinkel des rechtwinkligen Dreiecks; die gegebene Kathete ist nun dessen Ankathete, und wir verfahren jetzt wie im ersten Fall.
    (iv) Wir errichten über der Hypotenuse den Thaleskreis und schneiden diesen mit dem freien Schenkel des gegebenen Winkels; damit erhalten wir den dritten Punkt des rechtwinkligen Dreiecks.

26. a) Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck ΔABC mit dem rechten Winkel bei C und den beiden Katheten der Länge $\overline{BC} = a$ und $\overline{AC} = b$ sowie

dem Umkreisradius r_u und dem Inkreisradius r_i. Ferner seien A' bzw. B' die Berührpunkt des Inkreises an die Kathete $[BC]$ bzw. an die Kathete $[AC]$ sowie C' der Berührpunkt des Inkreises an die Hypotenuse $[AB]$. Schließlich bezeichne M_i den Inkreismittelpunkt sowie M_u den Umkreismittelpunkt. Dann ist

$$\begin{aligned}
a+b &= \left(\overline{AB'}+\overline{B'C}\right)+\left(\overline{BA'}+\overline{A'C}\right) \\
&\underset{(1)}{=} \left(\overline{AB'}+r_i\right)+\left(\overline{BA'}+r_i\right) \\
&= \overline{AB'}+\overline{BA'}+2\cdot r_i \\
&\underset{(2)}{=} \overline{AC'}+\overline{C'B}+2\cdot r_i \\
&= c+2\cdot r_i \\
&\underset{(3)}{=} 2\cdot r_u+2\cdot r_i \\
&= 2\cdot(r_u+r_i)\,.
\end{aligned}$$

Dabei geben folgende Aspekte ein:

(1) Das Viereck $\square M_iA'CB'$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge r_i.

(2) M_i hat von Seiten a, b und c des rechtwinkligen Dreiecks den gleichen Abstand, weswegen die Streckenlängen $\overline{AB'}=\overline{AC'}$ und $\overline{BA'}=\overline{C'B}$ jeweils übereinstimmen.

(3) Der Umkreismittelpunkt M_u im rechtwinkligen Dreieck ist der Mittelpunkt der Hypotenuse $[AB]$; für seinen Radius gilt $r_u=\overline{AC'}=\overline{C'B}$, weswegen $c=2\cdot r_u$ gilt.

b) Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck ΔABC mit dem Innenwinkel $\gamma=90°$, einer Kathete der Länge $b=3$ und einem Hypotenusenabschnitt der Länge $p=8$. Nach dem Kathetensatz ist

$$b^2=c\cdot q=(p+q)\cdot q=p\cdot q+q^2,$$

so daß sich für q die quadratische Gleichung $q^2+p\cdot q-b^2=0$, also

$$\begin{aligned}
q=\frac{1}{2}\left(-p\pm\sqrt{p^2-4\cdot(-b^2)}\right)=\frac{1}{2}\left(-8\pm\sqrt{8^2+4\cdot 3^2}\right)= \\
=\frac{1}{2}\left(-8\pm\sqrt{100}\right)=\frac{1}{2}(-8\pm 10)\underset{p>0}{=}\frac{1}{2}(-8+10)=1,
\end{aligned}$$

ergibt; damit ist $c=p+q=1+8=9$ sowie nach dem Höhensatz

$$h^2=p\cdot q=1\cdot 8=8,\quad \text{also}\quad h=\sqrt{8}=2\sqrt{2},$$

woraus man schließlich nach dem Satz des Pythagoras

$$a^2=c^2-b^2=9^2-3^2=81-9=72,\quad \text{also}\quad a=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$$

erhält.

27. Im gegebenen Quadrat $\Box PQRS$ erhalten wir wegen $r = \overline{RX} = \overline{RY} > 0$ die Beziehung $1 - r = \overline{SY} = \overline{QX}$, weswegen das Dreieck ΔPXY mit den beiden Seiten $[PX]$ und $[PY]$ der Länge s und der Seite $[XY]$ der Länge t stets gleichschenklig ist.

a) Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erhalten wir für die Länge s der Schenkel $[PX]$ und $[PY]$

$$s^2 = 1^2 + (1-r)^2 = r^2 - 2\,r + 2 \qquad \text{bzw.} \qquad s = \sqrt{r^2 - 2\,r + 2}$$

sowie für die Länge t der Basis $[XY]$

$$t^2 = r^2 + r^2 = 2\,r^2 \qquad \text{bzw.} \qquad t = \sqrt{2}\,r.$$

b) Das Dreieck ΔPXY ist genau dann gleichseitig, wenn die Seitenlängen s und t übereinstimmen, und wir erhalten

$$s = t \underset{s,t>0}{\iff} s^2 = t^2 \iff r^2 - 2\,r + 2 = 2\,r^2 \iff r^2 + 2\,r - 2 = 0$$
$$\iff r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \underset{r>0}{=} -1 + \sqrt{3}.$$

c) Wir bestimmen zunächst die Höhe h im gleichseitigen Dreieck ΔPXY in Abhängigkeit der Seitenlänge $s = t$ mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und erhalten

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\,s^2 \qquad \text{bzw.} \qquad h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,s$$

und damit für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔPXY dann

$$F_{\Delta PXY} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,s = \frac{\sqrt{3}}{4}\,s^2 \underset{s=\sqrt{2}\,r}{=} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\sqrt{2}\,r\right)^2 =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,r^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-1 + \sqrt{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(4 - 2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} - 3.$$

28. a) Wir betrachten das Dreieck ΔABC mit den Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$ und $c = \overline{AB}$; ferner sei H der Höhenfußpunkt von C auf AB mit der Höhe $h = \overline{HC}$ sowie $p = \overline{HB}$ und $q = \overline{HA}$. Unabhängig von der Lage des Höhenfußpunkts H gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$b^2 = h^2 + q^2 \qquad \text{und} \qquad a^2 = h^2 + p^2.$$

Wir berücksichtigen nun die unterschiedlichen Möglichkeiten für die Lage des Höhenfußpunkts H:

- H liegt (echt) zwischen A und B: dann ist $c = p + q$, und wir erhalten

$$a^2 + c^2 - b^2 = (h^2 + p^2) + c^2 - (h^2 + q^2) = c^2 + p^2 - q^2 =$$
$$= (p+q)^2 + p^2 - q^2 = p^2 + 2 \cdot p \cdot q + q^2 + p^2 - q^2 =$$
$$= 2 \cdot p^2 + 2 \cdot p \cdot q = 2 \cdot p \cdot (p + q) = 2 \cdot p \cdot c$$

und damit $\frac{1}{2} \cdot (a^2 + c^2 - b^2) = c \cdot p$ sowie

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 - a^2 = (h^2 + q^2) + c^2 - (h^2 + p^2) = c^2 + q^2 - p^2 = \\ = (p + q)^2 + q^2 - p^2 = p^2 + 2 \cdot p \cdot q + q^2 + q^2 - p^2 = \\ = 2 \cdot q^2 + 2 \cdot p \cdot q = 2 \cdot q \cdot (p + q) = 2 \cdot q \cdot c \end{aligned}$$

und damit $\frac{1}{2} \cdot (b^2 + c^2 - a^2) = c \cdot q$.

- H liegt links von A: dann ist $c = p - q$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 - b^2 = (h^2 + p^2) + c^2 - (h^2 + q^2) = c^2 + p^2 - q^2 = \\ = (p - q)^2 + p^2 - q^2 = p^2 - 2 \cdot p \cdot q + q^2 + p^2 - q^2 = \\ = 2 \cdot p^2 - 2 \cdot p \cdot q = 2 \cdot p \cdot (p - q) = 2 \cdot p \cdot c \end{aligned}$$

und damit $\frac{1}{2} \cdot (a^2 + c^2 - b^2) = c \cdot p$ sowie

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 - a^2 = (h^2 + q^2) + c^2 - (h^2 + p^2) = c^2 + q^2 - p^2 = \\ = (p - q)^2 + q^2 - p^2 = p^2 - 2 \cdot p \cdot q + q^2 + q^2 - p^2 = \\ = 2 \cdot q^2 - 2 \cdot p \cdot q = 2 \cdot q \cdot (q - p) = -2 \cdot q \cdot c \end{aligned}$$

und damit $\frac{1}{2} \cdot (b^2 + c^2 - a^2) = -c \cdot q$, wegen $c > 0$ und $q > 0$ also insbesondere $\frac{1}{2} \cdot (b^2 + c^2 - a^2) \neq c \cdot q$.

- Es gilt $H = A$: dann ist $q = 0$ und folglich $c = p$, und wir erhalten

$$a^2 + c^2 - b^2 = (b^2 + c^2) + c^2 - b^2 = 2 \cdot c^2 = 2 \cdot p \cdot c$$

und damit $\frac{1}{2} \cdot (a^2 + c^2 - b^2) = c \cdot p$ sowie

$$b^2 + c^2 - a^2 = b^2 + c^2 - (b^2 + c^2) = 0 = 2 \cdot 0 \cdot c = 2 \cdot q \cdot c$$

und damit $\frac{1}{2} \cdot (b^2 + c^2 - a^2) = c \cdot q$.

- Es gilt $H = B$: dann ist $p = 0$ und folglich $c = q$, und wir erhalten

$$a^2 + c^2 - b^2 = a^2 + c^2 - (a^2 + c^2) = 0 = 2 \cdot 0 \cdot c = 2 \cdot p \cdot c$$

und damit $\frac{1}{2} \cdot (a^2 + c^2 - b^2) = c \cdot p$ sowie

$$b^2 + c^2 - a^2 = (a^2 + c^2) + c^2 - a^2 = 2 \cdot c^2 = 2 \cdot q \cdot c$$

und damit $\frac{1}{2} \cdot (b^2 + c^2 - a^2) = c \cdot q$.

- H liegt rechts von B: dann ist $c = q - p$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 - b^2 = (h^2 + p^2) + c^2 - (h^2 + q^2) = c^2 + p^2 - q^2 = \\ = (q - p)^2 + p^2 - q^2 = q^2 - 2 \cdot p \cdot q + p^2 + p^2 - q^2 = \\ = 2 \cdot p^2 - 2 \cdot p \cdot q = 2 \cdot p \cdot (p - q) = -2 \cdot p \cdot c \end{aligned}$$

und damit $\frac{1}{2} \cdot (a^2 + c^2 - b^2) = -c \cdot p$, wegen $c > 0$ und $p > 0$ also insbesondere $\frac{1}{2} \cdot (a^2 + c^2 - b^2) \neq c \cdot p$, sowie

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 - a^2 = (h^2 + q^2) + c^2 - (h^2 + p^2) = c^2 + q^2 - p^2 = \\ = (q - p)^2 + q^2 - p^2 = q^2 - 2 \cdot p \cdot q + p^2 + q^2 - p^2 = \\ = 2 \cdot q^2 - 2 \cdot p \cdot q = 2 \cdot q \cdot (q - p) = 2 \cdot q \cdot c \end{aligned}$$

und damit $\frac{1}{2} \cdot (b^2 + c^2 - a^2) = c \cdot q$.

Damit gilt die gewünschte Beziehung

$$\begin{aligned} H \in [BA \quad &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \cdot (a^2 + c^2 - b^2) = c \cdot p \\ H \in [AB \quad &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \cdot (b^2 + c^2 - a^2) = c \cdot q \end{aligned}$$

Für den Innenwinkel bei C gelte nun $\gamma = 90°$. Damit ist das Dreieck ΔABC im Eckpunkt C rechtwinklig, so daß sich nach dem Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ ergibt; da H jetzt echt zwischen A und B liegt, erhalten wir

$$c \cdot p = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + c^2 - b^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + (a^2 + b^2) - b^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a^2 = a^2$$

sowie

$$c \cdot q = \frac{1}{2} \cdot \left(b^2 + c^2 - a^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(b^2 + (a^2 + b^2) - a^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot b^2 = b^2,$$

also den Kathetensatz.

b) Die Umkehrung des Satzes von Pythagoras lautet: Gilt in einem Dreieck ΔABC die Beziehung $b^2 = a^2 + c^2$, so besitzt das Dreieck ΔABC einen rechten Winkel $\beta = 90°$ bei B.

Für das Dreieck ΔABC gelte die Beziehung $b^2 = a^2 + c^2$. Gemäß a) gilt, unabhängig von der Lage des Höhenfußpunktes H auf AB, stets

$$\frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + c^2 - b^2\right) = \pm c \cdot p,$$

damit aber

$$\pm c \cdot p = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + c^2 - b^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + c^2 - (a^2 + c^2)\right) = 0,$$

woraus wegen $c > 0$ dann $p = 0$, folgt. Es ist also $H = B$ und damit $\beta = 90°$, es liegt also ein rechter Winkel im Eckpunkt B vor.