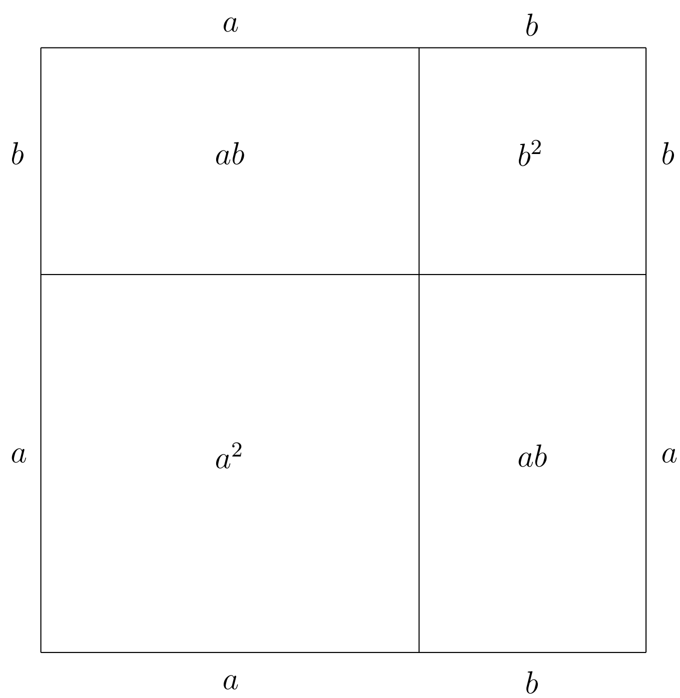
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 6
27.05.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Lösungsvorschlag —

21. a) Ein Quadrat mit der Seitenlänge $a+b$ und damit dem Flächeninhalt $(a+b)^2$ zerfällt gemäß der Skizze durch zwei zu den Seiten parallele Strecken in zwei Quadrate mit den Seitenlängen a bzw. b und damit den Flächeninhalten a^2 bzw. b^2 sowie zwei Rechtecke, die jeweils die Länge a und die Breite b und damit den Flächeninhalt ab besitzen:

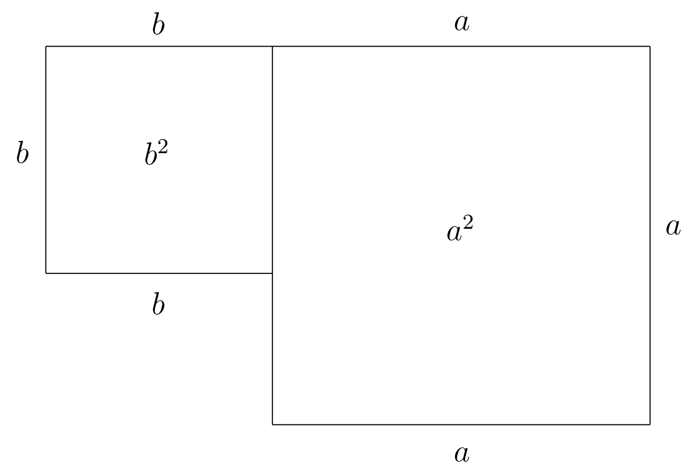


Als Flächenbilanz ergibt sich damit

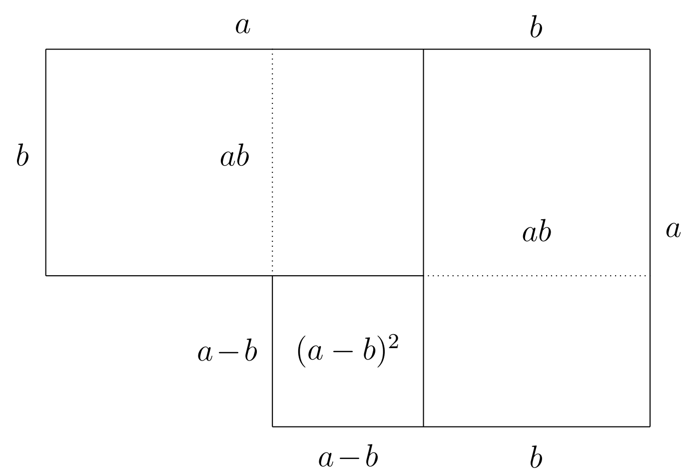
$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2,$$

wodurch die erste binomische Formel geometrisch veranschaulicht ist.

b) Zur Veranschaulichung der zweiten binomischen Formel für $a > b$ wird an ein Quadrat mit der Seitenlänge a und damit dem Flächeninhalt a^2 gemäß der Skizze ein Quadrat der Seitenlänge b und damit dem Flächeninhalt b^2 angelegt, so daß die Gesamtfigur den Flächeninhalt $a^2 + b^2$ besitzt:



Diese zerfällt nun gemäß der Skizze durch zwei zu den Seiten parallele Strecken in ein Quadrat mit der Seitenlänge $a-b$ und damit dem Flächeninhalt $(a-b)^2$ sowie zwei Rechtecke, die jeweils die Länge a und die Breite b und damit den Flächeninhalt ab besitzen:



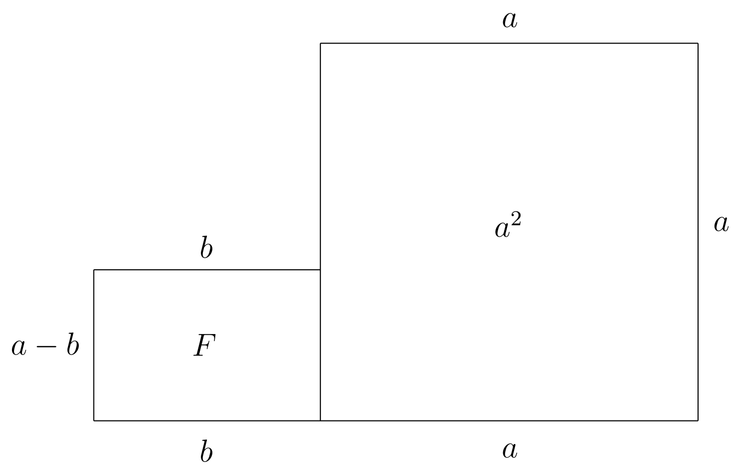
Als Flächenbilanz ergibt sich

$$(a-b)^2 + 2\,a\,b = a^2 + b^2$$

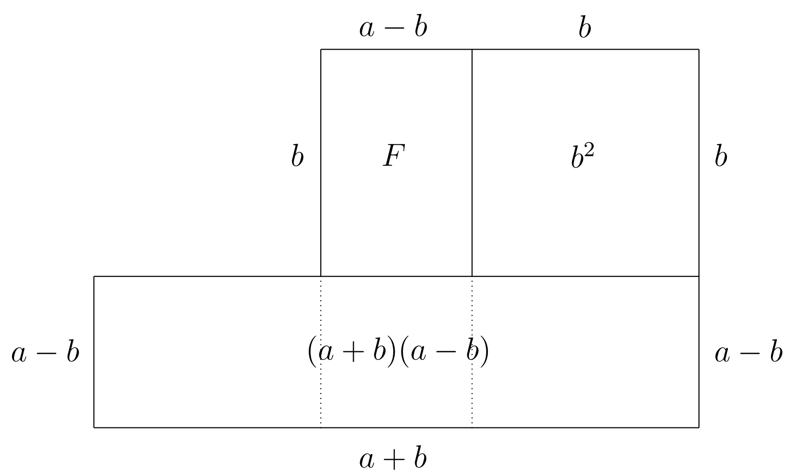
und damit die zweite binomische Formel

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2.$$

Zur Veranschaulichung der dritten binomischen Formel für $a > b$ wird an ein Quadrat mit der Seitenlänge a und damit dem Flächeninhalt a^2 gemäß der Skizze ein Rechteck mit der Länge b und der Breite $a-b$ und damit dem Flächeninhalt $F = b(a-b)$ angelegt, so daß die Gesamtfigur den Flächeninhalt $a^2 + F$ besitzt:



Diese zerfällt nun gemäß der Skizze durch zwei zu den Seiten parallele Strecken in ein Quadrat mit der Seitenlänge b und damit dem Flächeninhalt b^2 sowie zwei Rechtecke; dabei besitzt das eine die Länge $a+b$ und die Breite $a-b$ und damit den Flächeninhalt $(a+b)(a-b)$ und das andere die Länge b und die Breite $a-b$ und damit dem Flächeninhalt $F = b(a-b)$:



Als Flächenbilanz ergibt sich

$$a^2 + F = b^2 + (a+b)(a-b) + F,$$

nach Eliminierung der Hilfsgröße F also

$$a^2 = b^2 + (a+b)(a-b),$$

und damit die dritte binomische Formel

$$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b).$$

22. Wir haben bereits gesehen, daß die Menge G aller Kongruenzabbildungen der Anschauungsebene mit der Komposition $\circ$ eine Gruppe bilden.

a) Die Teilmenge G_1 aller eigentlichen Bewegungen bildet mit der Komposition $\circ$ eine Gruppe; wir zeigen dazu für $(G_1, \circ)$ die definierenden Eigenschaften einer Gruppe:

- Seien f, $g \in G_1$ zwei eigentliche Bewegungen. Wegen f, $g \in G$ ist zunächst auch $f \circ g \in G$, die Komposition $f \circ g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ist also wiederum eine bijektive Selbstabbildung, die längentreu und winkeltreu ist. Dabei bleibt der Drehsinn der Winkel gemäß

  $$\sphericalangle f(g(A))f(g(S))f(g(B)) = \sphericalangle g(A)g(S)g(B) = \sphericalangle ASB$$

  für alle A, S, $B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq S \neq B$ erhalten; damit ist $f \circ g$ auch orientierungstreu, also $f \circ g \in G_1$. Folglich ist G_1 bezüglich $\circ$ abgeschlossen.
- Das Assoziativgesetz überträgt sich von der Gruppe $(G, \circ)$ auf die Teilmenge G_1 und es gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für alle f, g, $h \in G_1$.
- Es ist $\mathrm{id} \in G_1$, und für alle $f \in G_1$ gilt $f \circ \mathrm{id} = f = \mathrm{id} \circ f$. Damit ist id das neutrale Element bezüglich $\circ$.
- Für jedes $f \in G_1$ gilt wegen $f \in G$ zunächst $f^{-1} \in G$; die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ist also wiederum eine bijektive Selbstabbildung, die längentreu und winkeltreu ist. Dabei bleibt der Drehsinn der Winkel gemäß

  $$\sphericalangle f^{-1}(A)f^{-1}(S)f^{-1}(B) = \sphericalangle f(f^{-1}(A))f(f^{-1}(S))f(f^{-1}(B)) = \sphericalangle ASB$$

  für alle A, S, $B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq S \neq B$ erhalten; damit ist f^{-1} auch orientierungstreu, also $f^{-1} \in G_1$.

b) Die Teilmenge G_2 aller uneigentlichen Bewegungen bildet mit der Komposition $\circ$ keine Gruppe; wir zeigen dazu anhand eines geeigneten Gegenbeispiels, daß G_2 bezüglich $\circ$ nicht abgeschlossen ist.

   Sind nämlich s_1 und s_2 zwei Achsenspiegelungen (und damit uneigentliche Bewegungen) zu den Achsen a_1 und a_2, so gilt zwar s_1, $s_2 \in G_2$, die Komposition $f = s_2 \circ s_1$ ist aber stets eine eigentliche Bewegung, also $s_2 \circ s_1 \notin G_2$:

- sind a_1 und a_2 parallel, so ist f eine Parallelverschiebung;
- schneiden sich a_1 und a_2 in Z, so ist f eine Drehung um Z.

c) Die Teilmenge G_3 aller Drehungen bildet mit der Komposition $\circ$ keine Gruppe; wir zeigen dazu anhand eines geeigneten Gegenbeispiels, daß G_3 bezüglich $\circ$ nicht abgeschlossen ist.

   Sind nämlich d_1 und d_2 zwei Drehungen jeweils um $180°$ (und damit zwei Punktspiegelungen) mit verschiedenen Drehzentren Z_1 und Z_2, so gilt zwar d_1, $d_2 \in G_3$, die Komposition $f = d_2 \circ d_1$ besitzt aber keinen Fixpunkt Z und ist damit insbesondere keine Drehung, also $d_2 \circ d_1 \notin G_3$: als Fixpunkt käme ja nur ein Punkt auf der Verbindungsgeraden von Z_1 und Z_2 in Frage, diese werden aber um $2 \cdot \overline{Z_1 Z_2}$ in Richtung von Z_1 nach Z_2 verschoben.

d) Die Teilmenge G_4 aller Drehungen um ein festes Drehzentrum Z bildet mit der Komposition $\circ$ eine Gruppe; wir zeigen dazu für $(G_4, \circ)$ die definierenden Eigenschaften einer Gruppe:

- Seien $f,\ g \in G_4$ zwei Drehungen um das Drehzentrum Z mit den Drehwinkeln δ_1 und δ_2. Dann ist die Komposition $f \circ g$ wieder eine Drehung um das Drehzentrum Z mit dem Drehwinkel $\delta_1 + \delta_2$, also $f \circ g \in G_4$. Folglich ist G_4 bezüglich $\circ$ abgeschlossen.
- Das Assoziativgesetz überträgt sich von der Gruppe $(G, \circ)$ auf die Teilmenge G_4, und es gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für alle $f,\ g,\ h \in G_4$.
- Die Identität kann als Drehung um das Drehzentrum Z mit dem Drehwinkel $0°$ aufgefaßt werden; es ist also $\mathrm{id} \in G_4$, und für alle $f \in G_4$ gilt $f \circ \mathrm{id} = f = \mathrm{id} \circ f$. Damit ist id das neutrale Element bezüglich $\circ$.
- Sei $f \in G_4$ die Drehung um das Drehzentrum Z mit dem Drehwinkel δ; damit ist f bijektiv, und f^{-1} ist die Drehung um das Drehzentrum Z mit dem Drehwinkel $-\delta$, also $f^{-1} \in G_4$, und es gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id} = f^{-1} \circ f$.

23. Wir betrachten die beiden Dreiecke ΔABC sowie $\Delta A'B'C'$ mit $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ und $\overline{CA} = \overline{C'A'}$. Wir zeigen, daß das Dreieck ΔABC durch eine Verkettung von höchstens drei Achsenspiegelungen auf das Dreieck $\Delta A'B'C'$ abgebildet werden kann: es sei zunächst

$$f_1 = \begin{cases} \text{Achsenspiegelung an der} & \\ \qquad \text{Mittelsenkrechten von } A \text{ und } A', & \text{für } A \neq A', \\ \text{Identität}, & \text{für } A = A', \end{cases}$$

mit $f_1(A) = A'$ sowie

$$\overline{A' f_1(B)} = \overline{f_1(A) f_1(B)} = \overline{AB} = \overline{A'B'},$$

dann

$$f_2 = \begin{cases} \text{Achsenspiegelung an der} & \\ \qquad \text{Mittelsenkrechten von } f_1(B) \text{ und } B', & \text{für } f_1(B) \neq B', \\ \text{Identität}, & \text{für } f_1(B) = B', \end{cases}$$

mit $f_2(A') = A'$ und $f_2(f_1(B)) = B'$ sowie

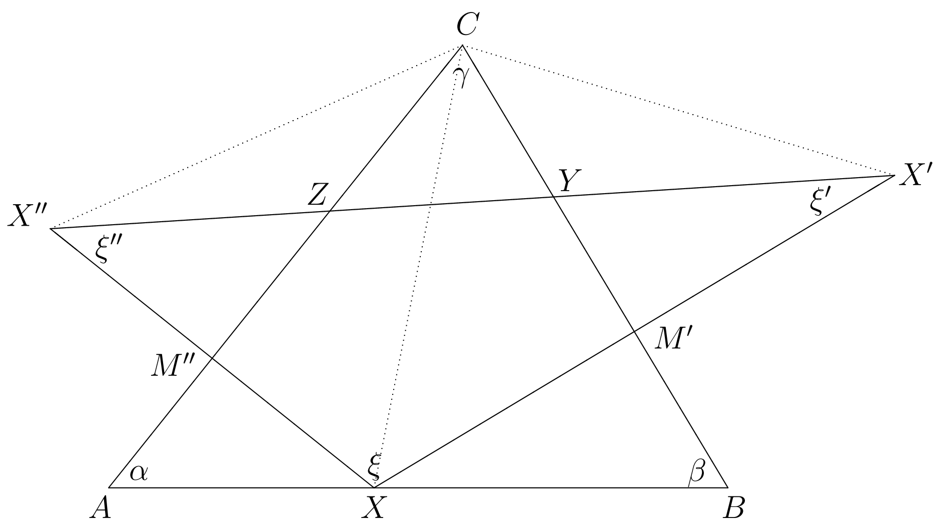
$$\begin{aligned} \overline{A' f_2(f_1(C))} = \overline{f_2(f_1(A)) f_2(f_1(C))} &= \overline{f_1(A) f_1(C)} = \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{B' f_2(f_1(C))} = \overline{f_2(f_1(B)) f_2(f_1(C))} &= \overline{f_1(B) f_1(C)} = \overline{BC} = \overline{B'C'}, \end{aligned}$$

und schließlich

$$f_3 = \begin{cases} \text{Achsenspiegelung an der} & \\ \qquad \text{Mittelsenkrechten von } f_2(f_1(C)) \text{ und } C', & \text{für } f_2(f_1(C)) \neq C', \\ \text{Identität}, & \text{für } f_2(f_1(C)) = C', \end{cases}$$

mit $f_3(A') = A'$ und $f_3(B') = B'$ sowie $f_3(f_2(f_1(C))) = C'$. Insgesamt ist damit die Kongruenzabbildung $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ die Verkettung von höchstens drei Achsenspiegelungen mit $f(A) = A'$ und $f(B) = B'$ und $f(C) = C'$.

24. a) Für das gegebene spitzwinklige Dreieck ΔABC werden die Innenwinkel wie üblich mit $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$ und $\gamma = \sphericalangle ACB$ bezeichnet; dabei gilt nach Voraussetzung $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$ und $\gamma < 90°$. Für den auf der Strecke $[AB]$ fest gewählten Punkt X mit $A \neq X \neq B$ wird der Bildpunkt X' bzw. X'' der Bildpunkt unter der Achsenspiegelung an der Geraden BC bzw. CA betrachtet; damit ist BC bzw. CA die Mittelsenkrechte von $[XX']$ bzw. $[XX'']$ ist, und die Mittelpunkte seien mit M' bzw. M'' bezeichnet:



Wegen $\beta < 90°$ und $\gamma < 90°$ liegt M' auf der Strecke $[BC]$, wegen $\alpha < 90°$ und $\gamma < 90°$ liegt M'' auf der Strecke $[AC]$; es gilt sogar $B \neq M' \neq C$ und $A \neq M'' \neq C$. Wir betrachten das Dreieck $\Delta XX'X''$ mit den Innenwinkeln ξ, ξ' und ξ'' gemäß der Skizze: aus

$$180° = \underbrace{\sphericalangle BXX'}_{=90°-\beta} + \underbrace{\sphericalangle X'XX''}_{=\xi} + \underbrace{\sphericalangle X''XA}_{=90°-\alpha} = \underbrace{(180° - (\alpha + \beta))}_{=\gamma} + \xi = \gamma + \xi$$

ergibt sich wegen $\gamma < 90°$ dann

$$\xi = 180° - \gamma > 90° \quad \text{und damit} \qquad \xi' < 90° \quad \text{und} \quad \xi'' < 90°,$$

so daß sich die Halbgeraden $[M'C$ und $[X'X''$ in einem Punkt Y sowie die Halbgeraden $[M''C$ und $[X''X'$ in einem Punkt Z schneiden; insbesondere liegt dann Y auf $[BC$ sowie Z auf $[AC$.

Aufgrund der Winkeltreue der beiden betrachteten Achsenspiegelungen an den Geraden BC und CA ergibt sich ferner

$$\sphericalangle M'CX' = \sphericalangle XCM' \qquad \text{und} \qquad \sphericalangle X''CM'' = \sphericalangle M''CX,$$

so daß wir für den gerichteten Winkel

$$\sphericalangle X''CX' = \sphericalangle X''CM'' + \sphericalangle M''CX + \sphericalangle XCM' + \sphericalangle M'CX' =$$
$$= 2 \cdot (\sphericalangle M''CX + \sphericalangle XCM') = 2 \cdot \sphericalangle M''CM' = 2 \cdot \gamma < 180°$$

erhalten; damit schneiden sich aber sogar die Strecken $[BC]$ und $[X'X'']$ im Punkt Y sowie die Strecken $[CA]$ und $[X'X'']$ im Punkt Z.

b) Für beliebige Punkte P auf der Strecke $[BC]$ und Q auf der Strecke $[CA]$ ergibt sich aufgrund der Abstandstreue der beiden betrachteten Achsenspiegelungen an der Geraden BC und CA dann

$$\overline{X'P} = \overline{XP} \qquad \text{und} \qquad \overline{QX''} = \overline{QX},$$

so daß sich unter zweimaliger Verwendung der Dreiecksungleichung

$$\overline{X'X''} \leq \overline{X'P} + \overline{PQ} + \overline{QX''} = \overline{XP} + \overline{PQ} + \overline{QX}$$

ergibt; damit beträgt die Gesamtlänge $\overline{XP} + \overline{PQ} + \overline{QX}$ mindestens $\overline{X'X''}$. Bei der speziellen Wahl der Punkte $P = Y$ und $Q = Z$ auf der Strecke $[X'X'']$ erhält man dagegen

$$\overline{X'X''} = \overline{X'Y} + \overline{YZ} + \overline{ZX''} = \overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX},$$

so daß hierdurch die minmale Gesamtlänge von $\overline{X'X''}$ realisiert wird.