MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 5
20.05.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Lösungsvorschlag —

17. Im Ergebnisraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ sind die drei Ereignisse

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 4, 5, 8\} \quad \text{und} \quad C = \{1, 2, 7, 8\}$$

zu betrachten; dabei gilt

$$A \cap B = \{1, 4\}, \quad A \cap C = \{1, 2\}, \quad B \cap C = \{1, 8\} \quad \text{und} \quad A \cap B \cap C = \{1\}.$$

a) Mit $P(\{k\}) = \frac{1}{8}$ für alle $k = 1, 2, \ldots, 8$ ergibt sich

$$\begin{array}{rclclcl} P(A \cap B) & = & \frac{1}{4} & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = & P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) & = & \frac{1}{4} & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = & P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) & = & \frac{1}{4} & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = & P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cap B \cap C) & = & \frac{1}{8} & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = & P(A) \cdot P(B) \cdot P(C); \end{array}$$

damit sind die Ereignisse A, B und C unabhängig.

b) Mit $P(\{k\}) = \frac{1}{16}$ für $k = 1, 3, 5, 7$ sowie $P(\{\ell\}) = \frac{3}{16}$ für $\ell = 2, 4, 6, 8$ ergibt sich

$$\begin{array}{rclclcl} P(A \cap B) & = & \frac{1}{4} & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = & P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) & = & \frac{1}{4} & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = & P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) & = & \frac{1}{4} & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = & P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cap B \cap C) & = & \frac{1}{16} & \neq & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = & P(A) \cdot P(B) \cdot P(C); \end{array}$$

damit sind die Ereignisse A, B und C zwar paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig.

c) $P(\{k\}) = \frac{1}{12}$ für $k = 1, 2, 4, 6, 7, 8$ sowie $P(\{\ell\}) = \frac{1}{4}$ für $\ell = 3, 5$ ergibt sich

$$\begin{array}{rclclcl} P(A \cap B) & = & \frac{1}{6} & \neq & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = & P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) & = & \frac{1}{6} & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} & = & P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) & = & \frac{1}{6} & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} & = & P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cap B \cap C) & = & \frac{1}{12} & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} & = & P(A) \cdot P(B) \cdot P(C); \end{array}$$

damit sind die Ereignisse A, B und C abhängig.

18. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum sowie A und $B \in \mathcal{A}$ zwei Ereignisse. Wir zeigen zunächst die Äquivalenzbeziehung

$$A \text{ und } B \text{ unabhängig} \iff P(A \cap B) \cdot P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B) \cdot P(A \cap \overline{B}).$$

- Für „$\Longrightarrow$“ seien die beiden Ereignisse A und B unabhängig. Damit sind auch die Ereignisse A und $\overline{B}$, $\overline{A}$ und B sowie $\overline{A}$ und $\overline{B}$ unabhängig, und es gilt

$$\begin{aligned} P(A \cap B) \cdot P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= \big(P(A) \cdot P(B)\big) \cdot \big(P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})\big) = \\ &= \big(P(\overline{A}) \cdot P(B)\big) \cdot \big(P(A) \cdot P(\overline{B})\big) = P(\overline{A} \cap B) \cdot P(A \cap \overline{B}). \end{aligned}$$

- Für „$\Longleftarrow$“ sei $P(A \cap B) \cdot P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B) \cdot P(A \cap \overline{B})$. Wir eliminieren im ersten Schritt das Ereignis $\overline{B}$ mit Hilfe von

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}), \quad \text{also} \quad P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B), \\ P(\overline{A}) &= P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}), \quad \text{also} \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B), \end{aligned}$$

  und erhalten

$$P(A \cap B) \cdot \big(P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B)\big) = P(\overline{A} \cap B) \cdot \big(P(A) - P(A \cap B)\big),$$

  also

$$\begin{aligned} P(A \cap B) \cdot P(\overline{A}) - P(A \cap B) \cdot P(\overline{A} \cap B) &= \\ = P(\overline{A} \cap B) \cdot P(A) - P(\overline{A} \cap B) \cdot P(A \cap B), \end{aligned}$$

  und damit

$$P(A \cap B) \cdot P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) \cdot P(A);$$

  nun eliminieren wir noch im zweiten Schritt das Ereignis $\overline{A}$ mit Hilfe von

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B), \quad \text{also} \quad P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B),$$

  sowie $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ und erhalten

$$P(A \cap B) \cdot \big(1 - P(A)\big) = \big(P(B) - P(A \cap B)\big) \cdot P(A),$$

  also

$$P(A \cap B) - P(A \cap B) \cdot P(A) = P(B) \cdot P(A) - P(A \cap B) \cdot P(A)$$

  und damit

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

  Folglich sind die beiden Ereignisse A und B unabhängig.

Wir zeigen nun im Falle $0 < P(B) < 1$ die Äquivalenzbeziehung

$$A, B \text{ unabhängig} \iff P_B(A) = P_{\overline{B}}(A).$$

- Für „$\Longrightarrow$" seien die beiden Ereignisse $A,\ B \in \mathcal{A}$ unabhängig. Damit gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ sowie $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$ und folglich

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

sowie

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{B})}{P(\overline{B})} = P(A)$$

und damit $P_B(A) = P_{\overline{B}}(A)$.

- Für „$\Longleftarrow$" gelte die Beziehung $P_B(A) = P_{\overline{B}}(A)$; wegen $0 < P(B) < 1$ gilt mit $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$ auch $0 < P(\overline{B}) < 1$. Ferner gilt zudem die Beziehung $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
P_B(A) = P_{\overline{B}}(A) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \\
&\Longrightarrow \quad P(A \cap B) \cdot P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) \cdot P(B) \\
&\Longrightarrow \quad P(A \cap B) \cdot (1 - P(B)) = \\
&\qquad\qquad = (P(A) - P(A \cap B)) \cdot P(B) \\
&\Longrightarrow \quad P(A \cap B) - P(A \cap B) \cdot P(B) = \\
&\qquad\qquad = P(A) \cdot P(B) - P(A \cap B) \cdot P(B) \\
&\Longrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),
\end{aligned}$$

weswegen die Ereignisse $A,\ B \in \mathcal{A}$ unabhängig sind.

19. a) Für die beiden als unabhängig vorausgesetzten Ereignisse

$$\begin{aligned}
U &: \text{„Max trifft unten."} \\
O &: \text{„Max trifft oben."}
\end{aligned}$$

mit den Wahrscheinlichkeiten $P(U) = 0{,}40$ und $P(U) = 0{,}25$ erhalten wir:

- Die Wahrscheinlichkeit, daß Max unten und oben trifft, beträgt

$$p_1 = P(U \cap O) = P(U) \cdot P(O) = 0{,}40 \cdot 0{,}25 = 0{,}10 = 10{,}0\ \%.$$

- Die Wahrscheinlichkeit, daß Max genau einmal trifft, beträgt

$$\begin{aligned}
p_2 = P(U \cap \overline{O}) + P(\overline{U} \cap O) = P(U) \cdot P(\overline{O}) + P(\overline{U}) \cdot P(O) = \\
= 0{,}40 \cdot 0{,}75 + 0{,}60 \cdot 0{,}25 = 0{,}30 + 0{,}15 = 0{,}45 = 45{,}0\ \%.
\end{aligned}$$

- Die Wahrscheinlichkeit, daß Max überhaupt nicht trifft, beträgt

$$p_3 = P(\overline{U} \cap \overline{O}) P(\overline{U}) \cdot P(\overline{O}) = 0{,}60 \cdot 0{,}75 = 0{,}45 = 45{,}0\ \%.$$

b) Nun führt Max 20 Durchgänge unabhängig voneinander aus.

- Die Situation stellt eine Bernoulli–Kette der Länge $n = 20$ mit Parameter $p = p_1 = 0{,}10$ dar. Die Wahrscheinlichkeit, daß Max in genau $k = 3$ Durchgängen unten und oben trifft, beträgt

$$P(\{k = 3\}) = \binom{20}{3} \cdot 0{,}10^3 \cdot 0{,}90^{17} \approx 19{,}01\ \%.$$

- Die Situation stellt eine Bernoulli–Kette der Länge $n = 20$ mit Parameter $p = p_2 = 0{,}45$ dar. Die Wahrscheinlichkeit, daß Max in höchstens $k = 5$ Durchgängen genau einmal trifft, beträgt

$$P(\{k \le 5\}) = \sum_{k=0}^{5} \binom{20}{k} \cdot 0{,}45^k \cdot 0{,}55^{20-k} \approx 5{,}53\ \%.$$

- Die Situation stellt eine Bernoulli–Kette der Länge $n = 20$ mit Parameter $p = 1 - p_3 = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$ dar. Die Wahrscheinlichkeit, daß Max in mindestens $k = 16$ Durchgängen mindestens eines der beiden Ziele trifft, beträgt

$$P(\{k \ge 16\}) = \sum_{k=16}^{20} \binom{20}{k} \cdot 0{,}55^k \cdot 0{,}45^{20-k} \approx 1{,}89\ \%.$$

20. a) Die Nachricht kommt genau dann korrekt an, wenn eine gerade Anzahl an Übertragungsfehler auftritt; bei den gegebenen Konstellationen kommt die Nachricht also bei keinem, zwei, vier oder sechs Übertragungsfehler korrekt an.

- Für $p = 0{,}2$ und $n = 6$ erhalten wir

$$P = \binom{6}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^6 + \binom{6}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 + \\ + \binom{6}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^2 + \binom{6}{6} \cdot 0{,}2^6 \cdot 0{,}8^0 \approx 52{,}33\ \%.$$

- Für $p = 0{,}2$ und $n = 7$ erhalten wir

$$P = \binom{7}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^7 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^5 + \\ + \binom{7}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^3 + \binom{7}{6} \cdot 0{,}2^6 \cdot 0{,}8^1 \approx 51{,}40\ \%.$$

- Für $p = 0{,}8$ und $n = 6$ erhalten wir

$$P = \binom{6}{0} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^6 + \binom{6}{2} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^4 + \\ + \binom{6}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^2 + \binom{6}{6} \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2^0 \approx 52{,}33\ \%.$$

- Für $p = 0{,}8$ und $n = 7$ erhalten wir

$$P = \binom{7}{0} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^7 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^5 + \\ + \binom{7}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^3 + \binom{7}{6} \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2^1 \approx 48{,}60\ \%.$$

b) Wir betrachten eine Bernoulli–Kette der Länge n mit dem Parameter p. Die Nachricht kommt genau bei einer geraden Anzahl $2\,i$ mit $0 \le i \le k$ von Übertragungsfehler korrekt an; dabei bezeichnet k die größte natürliche Zahl mit $2\,k \le n$. Mit der Trefferwahrscheinlichkeit p und der dazugehörigen Gegenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit einer korrekt übertragenen Nachricht

$$P = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i} p^{2i}\, q^{n-2i}.$$

c) Mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes erhalten wir zum einen

$$1 = 1^n = (q+p)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \cdot q^{n-\ell} \cdot p^{\ell}$$

sowie zum anderen

$$(1-2\,p)^n = (q-p)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \cdot q^{n-\ell} \cdot (-p)^{\ell},$$

zusammen also

$$\begin{aligned} 1 + (1-2\,p)^n &= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \cdot q^{n-\ell} \cdot p^{\ell} + \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \cdot q^{n-\ell} \cdot (-p)^{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \cdot q^{n-\ell} \cdot \left(p^{\ell} + (-1)^{\ell} \cdot p^{\ell}\right) \end{aligned}$$

mit

$$p^{\ell} + (-1)^{\ell} \cdot p^{\ell} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \ell \text{ ungerade}, \\ 2\,p^{\ell}, & \text{falls } \ell \text{ gerade}. \end{cases}$$

Damit sind in der Summe nur die Summanden mit einem geraden Index $\ell = 2\,i$ für $0 \le i \le k$ zu berücksichtigen, und wir erhalten

$$\begin{aligned} 1 + (1-2\,p)^n &= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \cdot q^{n-\ell} \cdot \left(p^{\ell} + (-1)^{\ell} \cdot p^{\ell}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i} \cdot q^{n-2i} \cdot 2\,p^{2i} \\ &= 2 \cdot \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} p^{2i}\, q^{n-2i} \;=\; 2 \cdot P \end{aligned}$$

und damit die gewünschte Beziehung

$$P = \frac{1 + (1-2\,p)^n}{2}.$$

d) • Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Anzahl n der Übertragungen gerade ist, und bestimmen P für spezielle Werte von p:

$$\begin{aligned}
&\text{für} \quad p = 0 \quad \text{ergibt sich} \quad P = \frac{1 + (1 - 2 \cdot 0)^n}{2} = \frac{1+1}{2} = 1;\\
&\text{für} \quad p = \frac{1}{2} \quad \text{ergibt sich} \quad P = \frac{1 + (1 - 2 \cdot \frac{1}{2})^n}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2};\\
&\text{für} \quad p = 1 \quad \text{ergibt sich} \quad P = \frac{1 + (1 - 2 \cdot 1)^n}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

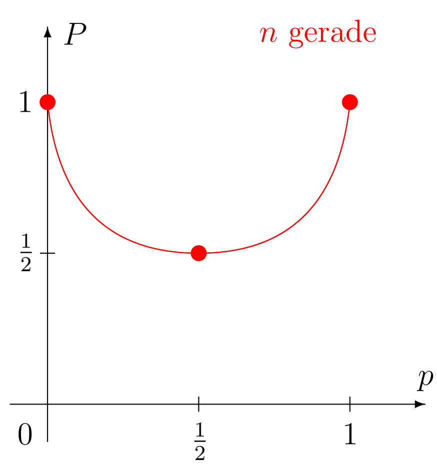
Steigt nun p von 0 bis $\frac{1}{2}$, so fällt $1 - 2\,p$ von 1 bis 0, und damit fällt auch $(1 - 2\,p)^n$ von 1 bis 0, so daß schließlich P von 1 bis $\frac{1}{2}$ fällt; steigt p weiter von $\frac{1}{2}$ bis 1, so fällt $1 - 2\,p$ weiter von 0 bis -1, und wegen n gerade steigt $(1 - 2\,p)^n$ wieder von 0 bis 1, so daß schließlich auch P wieder von $\frac{1}{2}$ bis 1 steigt.

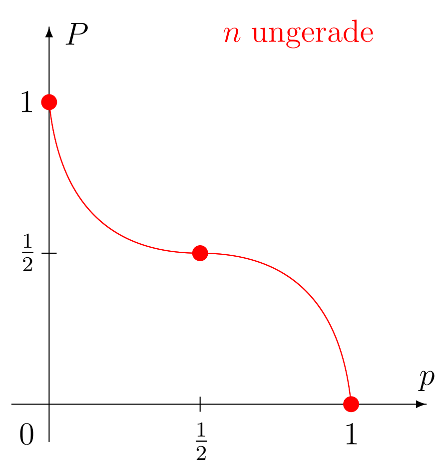
• Wir betrachten nun den Fall, daß die Anzahl n der Übertragungen ungerade ist, und bestimmen P für spezielle Werte von p:

$$\begin{aligned}
&\text{für} \quad p = 0 \quad \text{ergibt sich} \quad P = \frac{1 + (1 - 2 \cdot 0)^n}{2} = \frac{1+1}{2} = 1;\\
&\text{für} \quad p = \frac{1}{2} \quad \text{ergibt sich} \quad P = \frac{1 + (1 - 2 \cdot \frac{1}{2})^n}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2};\\
&\text{für} \quad p = 1 \quad \text{ergibt sich} \quad P = \frac{1 + (1 - 2 \cdot 1)^n}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Steigt nun p von 0 bis 1, so fällt $1 - 2\,p$ von 1 bis -1; da n ungerade ist, fällt auch $(1 - 2\,p)^n$ von 1 bis -1, so daß schließlich P von 1 bis 0 fällt.

Der Zusammenhang zwischen P und p ließe sich damit folgendermaßen graphisch veranschaulichen:





Diese graphische Veranschaulichung ist jedoch für die gewünschte Interpretation nicht zwingend erforderlich.