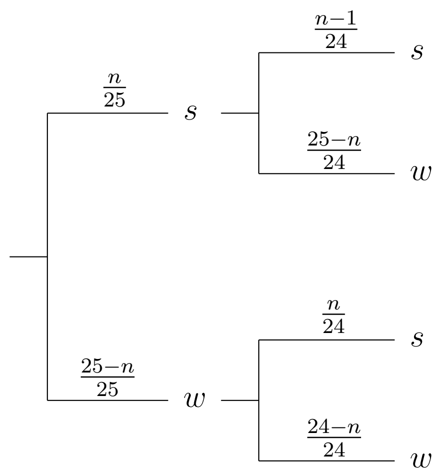
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 4
13.05.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Lösungsvorschlag —

13. a) Dem vorliegenden zweistufigen Zufallsexperiment liegen die Ergebnisräume $\Omega_1 = \{s, w\}$ und $\Omega_2 = \{s, w\}$ mit „s = schwarz“ und „w = weiß“ zugrunde; wir erhalten das folgende Baumdiagramm:



$P(\{(s,s)\}) = \frac{n}{25} \cdot \frac{n-1}{24}$

$P(\{(s,w)\}) = \frac{n}{25} \cdot \frac{25-n}{24}$

$P(\{(w,s)\}) = \frac{25-n}{25} \cdot \frac{n}{24}$

$P(\{(w,w)\}) = \frac{25-n}{25} \cdot \frac{24-n}{24}$

b) Das Ereignis A: „Die beiden gezogenen Kugeln sind gleichfarbig.“ besteht aus den beiden Ergebnissen (s, s) und (w, w), und wir erhalten

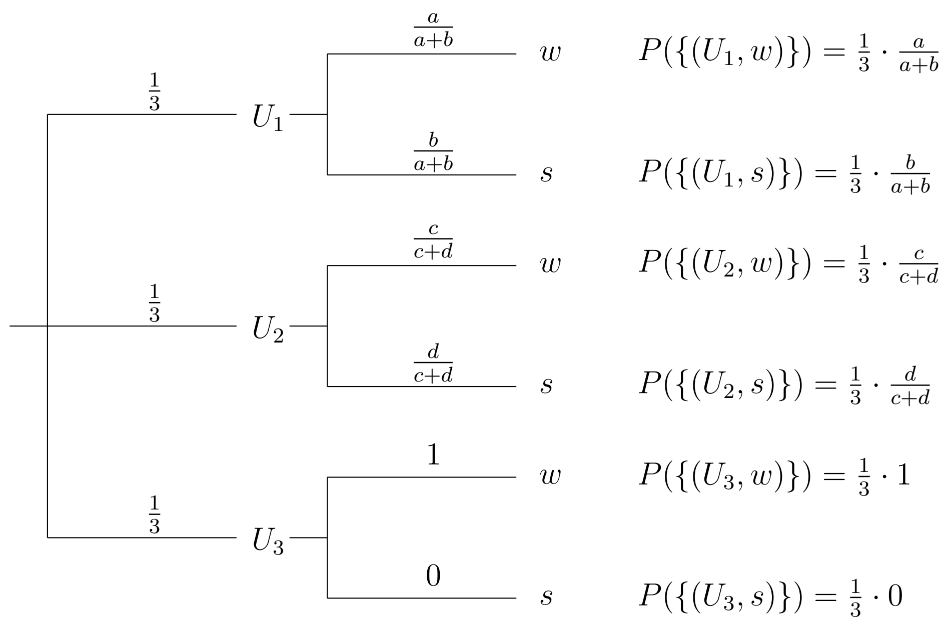
$$P(A) = \frac{n}{25} \cdot \frac{n-1}{24} + \frac{25-n}{25} \cdot \frac{24-n}{24} = \frac{(n^2 - n) + (600 - 25\,n - 24\,n + n^2)}{600} = \frac{2\,n^2 - 50\,n + 600}{600} = \frac{n^2 - 25\,n + 300}{300}.$$

c) Wir bestimmen nun diejenigen n, für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gleich 50 % ist.

$$P(A) = \frac{1}{2} \iff \frac{n^2 - 25\,n + 300}{300} = \frac{1}{2} \iff n^2 - 25\,n + 300 = 150 \iff n^2 - 25\,n + 150 = 0 \iff (n-10)\cdot(n-15) = 0 \iff \big(n = 10 \;\text{ oder }\; n = 15\big)$$

d) Der von n abhängige Term $\frac{1}{300}\,(n^2 - 25\,n + 300)$ für $P(A)$ beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel bei $n = \frac{25}{2}$, weswegen $P(A)$ für $n = 12$ und $n = 13$ den minimalen Wert $\frac{12}{25}$ annimmt.

14. a) Mit „U_1 = Urne 1“, „U_2 = Urne 2“ und „U_3 = Urne 3“ sowie „w = weiß“ und „s = schwarz“ erhalten wir das folgende Baumdiagramm:



Für die Wahrscheinlichkeit, daß die gezogenen weiße Kugel aus Urne 1 stammt, erhalten wir demnach

$$P = \frac{P(\{(U_1, w)\})}{P(\{(U_1, w)\}) + P(\{(U_2, w)\}) + P(\{(U_3, w)\})} =$$
$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{1}{3} \cdot \frac{c}{c+d} + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1}.$$

b) Für $a = b$ ist $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}$, und für

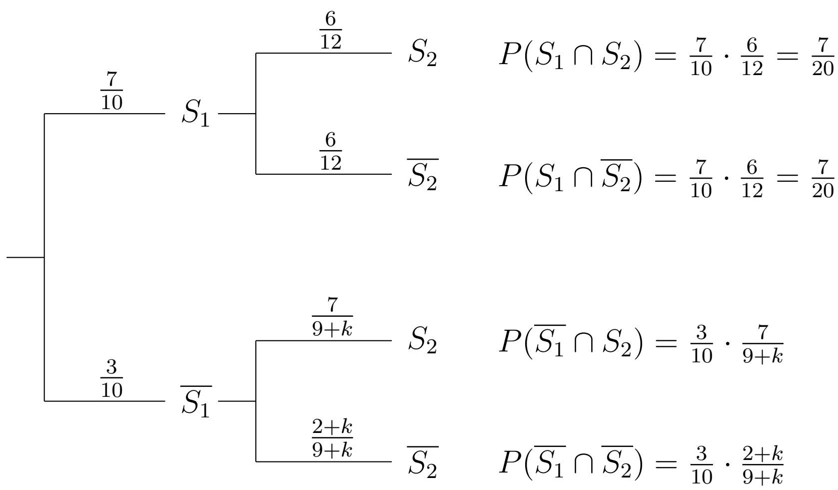
$$P = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{c}{c+d} + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{c}{c+d}} =$$
$$= \frac{1}{3 + \frac{2c}{c+d}} = \frac{c+d}{3\,(c+d) + 2c} = \frac{c+d}{5c + 3d}$$

erhalten wir

$$P = \frac{3}{10} \iff \frac{c+d}{5c+3d} = \frac{3}{10} \iff 10\,(c+d) = 3\,(5c + 3d) \iff$$
$$\iff 10\,c + 10\,d = 15\,c + 9\,d \iff d = 5\,c.$$

15. Wir betrachten für die gegebene Urne das geschilderte zweistufige Experiment.

- Wir erhalten das folgende Baumdiagramm



- Für das Ereignis S_2 erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$P(S_2) = P(S_1 \cap S_2) + P(\overline{S_1} \cap S_2) = \frac{7}{20} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9+k}.$$

- Die Ereignisse S_1 und S_2 sind wegen

$$P(S_1) \cdot P(S_2) = P(S_1 \cap S_2) \iff \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{7}{20} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9+k} \right) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{12}$$
$$\iff \frac{7}{20} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9+k} = \frac{1}{2} \iff \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9+k} = \frac{3}{20}$$
$$\iff \frac{7}{9+k} = \frac{1}{2} \iff 9+k = 14 \iff k = 5$$

genau für $k = 5$ stochastisch unabhängig.

16. a) Die Ereignisse

$$\begin{aligned} R &= \text{„}R \text{ trifft am Schießstand.“} \\ S &= \text{„}S \text{ trifft am Schießstand.“} \\ T &= \text{„}T \text{ trifft am Schießstand.“} \end{aligned}$$

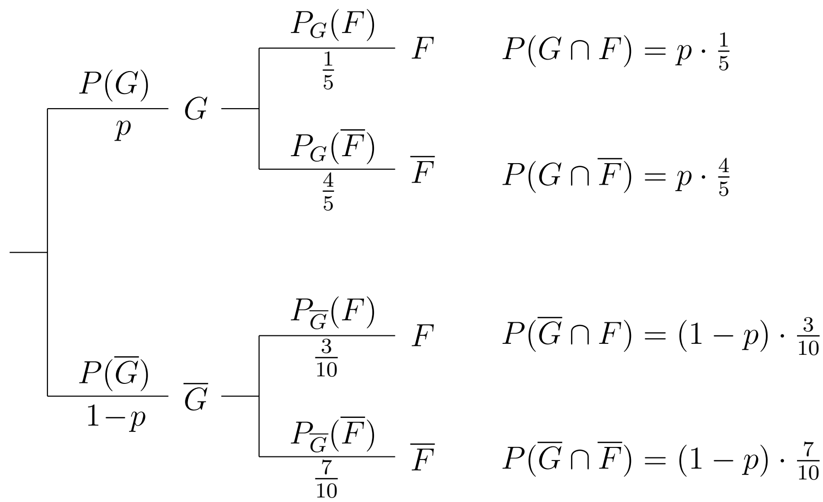
sind unabhängig mit $P(R) = \frac{3}{4}$, $P(S) = \frac{1}{2}$ und $P(T) = \frac{1}{5}$. Für die Wahrscheinlichkeit, daß einer der beiden Treffer von T stammt, erhalten wir

$$\begin{aligned} p &= \frac{P(R \cap \overline{S} \cap T) + P(\overline{R} \cap S \cap T)}{P(R \cap S \cap \overline{T}) + P(R \cap \overline{S} \cap T) + P(\overline{R} \cap S \cap T)} \\ &= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{4} = 25\ \%. \end{aligned}$$

b) Wir betrachten die beiden Ereignisse

$$\begin{aligned} G &: \text{„Die Bauteile stammen von Firma G.“} \\ F &: \text{„Die Bauteile sind fehlerhaft.“} \end{aligned}$$

und erhalten das folgende Baumdiagramm:



Für den Anteil der fehlerhaften Bauteile ergibt sich

$$P(F) = P(G \cap F) + P(\overline{G} \cap F) = p \cdot \frac{1}{5} + (1-p) \cdot \frac{3}{10},$$

so daß der Anteil von Firma G an diesen fehlerhaften Bauteilen

$$P_F(G) = \frac{P(G \cap F)}{P(F)} = \frac{p \cdot \frac{1}{5}}{p \cdot \frac{1}{5} + (1-p) \cdot \frac{3}{10}}$$

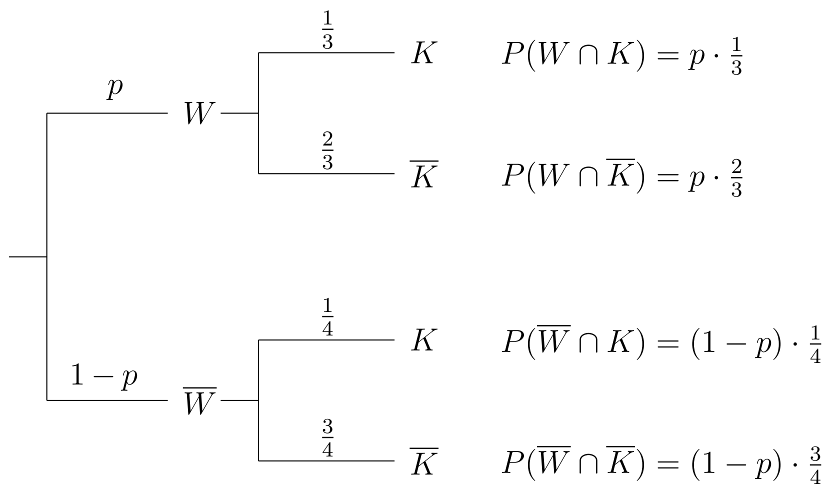
beträgt; für den gesuchten Anteil p der gelieferten Bauteile, der von Firma G stammt, erhalten wir damit

$$P_F(G) = \frac{2}{3} \iff \frac{p \cdot \frac{1}{5}}{p \cdot \frac{1}{5} + (1-p) \cdot \frac{3}{10}} = \frac{2}{3} \iff$$
$$\iff p \cdot \frac{3}{5} = p \cdot \frac{2}{5} + (1-p) \cdot \frac{3}{5} \iff 3\,p = 2\,p + 3\,(1-p) \iff$$
$$\iff 3\,p = 2\,p + 3 - 3\,p \iff 4\,p = 3 \iff p = \frac{3}{4}.$$

c) Wir betrachten die beiden Ereignisse

$$\begin{aligned} W &: \text{„Die befragte Person ist weiblich.“} \\ K &: \text{„Die befragte Person würde das Produkt kaufen.“} \end{aligned}$$

und erhalten das folgende Baumdiagramm:



Da insgesamt $\frac{3}{10}$ der befragten Personen dieses Produkt kaufen würden, erhalten wir

$$P(K) = P(W \cap K) + P(\overline{W} \cap K) \iff \frac{3}{10} = p \cdot \frac{1}{3} + (1-p) \cdot \frac{1}{4}$$
$$\iff \frac{3}{10} = p \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - p \cdot \frac{1}{4} \iff \frac{1}{20} = p \cdot \frac{1}{12} \iff p = \frac{3}{5},$$

womit dann das obige Baumdiagramm vervollständigt werden kann. Für die Wahrscheinlichkeit, daß eine befragte Person, die das Produkt nicht kaufen würde, eine Frau ist, erhalten wir

$$P_{\overline{K}}(W) = \frac{P(W \cap \overline{K})}{P(\overline{K})} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}.$$