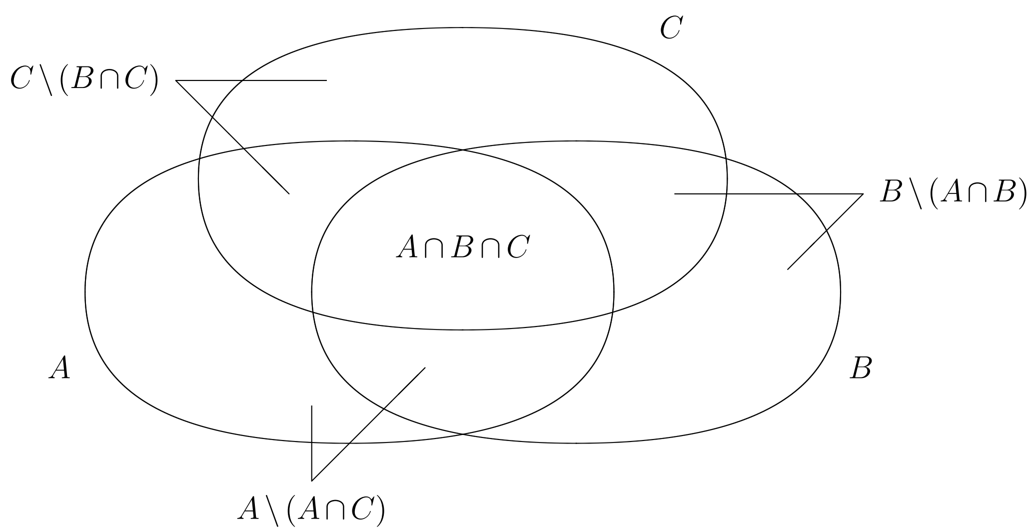
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 3
06.05.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Lösungsvorschlag —

9. Wir betrachten die Ereignisse A, B, $C \in \mathcal{A}$; für diese gilt

$$A \cup B \cup C = (A \setminus (A \cap C)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (B \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)\,.$$



Die vier Mengen $(A \setminus (A \cap C))$, $(B \setminus (A \cap B))$, $(C \setminus (B \cap C))$ und $(A \cap B \cap C)$ sind paarweise disjunkt mit $(A \cap C) \subseteq A$, $(A \cap B) \subseteq B$ und $(B \cap C) \subseteq C$, und daher ergibt sich

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P\,(A \setminus (A \cap C)) + P\,(B \setminus (A \cap B)) + \\ &\quad + P\,(C \setminus (B \cap C)) + P\,(A \cap B \cap C) = \\ &= (P(A) - P(A \cap C)) + (P(B) - P(A \cap B)) + \\ &\quad + (P(C) - P(B \cap C)) + P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Alternativ läßt sich die Formel von Sylvester auch durch zweimalige Anwendung der in der Vorlesung für alle Ereignisse D, $E \in \mathcal{A}$ gezeigten Beziehung

$$P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E)$$

über

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) \\
&= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\
&= \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) + P(C) - \\
&\qquad -P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \\
&\qquad -\big(P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C))\big) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - \\
&\qquad -P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

herleiten.

10. Aus sechs Personen A, B, C, D, E und F soll ein dreiköpfiger Ausschuß zufällig durch Losentscheid gebildet werden.

a) Da in der zu betrachtenden Situation keine Person mehrfach in den Ausschuß gewählt werden kann und zudem keine Reihung der Ausschußmitglieder erfolgt, ist

$$\begin{aligned}
\Omega = \{&\text{ABC, ABD, ABE, ABF, ACD, ACE, ACF, ADE, ADF, AEF,} \\
&\text{BCD, BCE, BCF, BDE, BDF, BEF, CDE, CDF, CEF, DEF}\}
\end{aligned}$$

ein geeigneter Ergebnisraum; dabei entspricht die alphabetische Reihung ABC der Menge {A, B, C}. Wir erhalten also

$$|\Omega| = \binom{6}{3} = 20,$$

und folglich gilt mit den Ergebnissen $\omega_1 = \text{ABC}, \ldots, \omega_{20} = \text{DEF}$ für die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Elementarereignisse

$$P(\{\omega_1\}) = \ldots = P(\{\omega_{20}\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{20}.$$

b)
- Wir betrachten das Ereignis

$$A_1 = \text{„A wird in den Ausschuß gewählt.“}$$

Da Person A fest im Ausschuß ist, kommen für die beiden übrigen Plätze im Ausschuß noch fünf Personen in Frage; es ist also $|A_1| = \binom{5}{2} = 10$ und damit

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Alternativ kann man gemäß a) die für A_1 günstigen Ergebnisse direkt aus dem Ergebnisraum Ω abzählen.

- Wir betrachten das Ereignis

$$A_2 = \text{„A und B werden in den Ausschuß gewählt."}$$

Da die Personen A und B fest im Ausschuß sind, kommen für den übrigen Platz im Ausschuß noch vier Personen in Frage; es ist also $|A_2| = \binom{4}{1} = 4$ und damit

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Alternativ kann man gemäß a) die für A_2 günstigen Ergebnisse direkt aus dem Ergebnisraum Ω abzählen.

- Wir betrachten das Ereignis

$$A_3 = \text{„A oder B werden in den Ausschuß gewählt."}$$

Da Person A oder Person B oder beide Personen fest im Ausschuß sind, gibt es gemäß Ereignis A_1 genau $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten, in denen Person A im Ausschuß ist; unter diesen zehn Möglichkeiten sind bereits die vier Möglichkeiten beinhaltet, in den Person A und B im Ausschuß sind. Damit gibt es noch $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten, in denen nur Person B im Ausschuß ist; es ist also $|A_3| = \binom{5}{3} + \binom{4}{2} = 10 + 6 = 16$ und damit

$$P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

Alternativ kann man gemäß a) die für A_3 günstigen Ergebnisse direkt aus dem Ergebnisraum Ω abzählen.

- Wir betrachten das Ereignis

$$A_4 = \text{„A wird nicht in den Ausschuß gewählt."}$$

Es ist $A_4 = \Omega \setminus A_1$, also

$$P(A_4) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Alternativ kann man gemäß a) die für A_4 günstigen Ergebnisse direkt aus dem Ergebnisraum Ω abzählen.

- Wir betrachten das Ereignis

$$A_5 = \text{„Weder A noch B werden in den Ausschuß gewählt."}$$

Da weder Person A noch B im Ausschuß sind, kommen für drei Plätze im Ausschuß noch vier Personen in Frage; es ist also $|A_5| = \binom{4}{3} = 4$ und damit

$$P(A_5) = \frac{|A_5|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Alternativ kann man gemäß a) die für A_5 günstigen Ergebnisse direkt aus dem Ergebnisraum Ω abzählen oder über das zu A_5 komplementäre Ereignis A_3 argumentieren.

11. a) Für das Zahlenlotto „6 aus 49“ wählen wir als Ergebnisraum Ω die Menge aller 6–elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, 49\}$ mit $|\Omega| = \binom{49}{6}$.

- Für das Ereignis

$$A_1 = \text{„Es werden lauter aufeinanderfolgende Zahlen gezogen.“}$$

gibt es genau die folgenden Konstellationen

$$\{1, \ldots, 6\}, \{2, \ldots, 7\}, \ldots, \{43, \ldots, 48\}, \{44, \ldots, 49\},$$

also insgesamt 44 für A_1 günstige Ergebnisse; damit ist

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{44}{\binom{49}{6}} \approx 3{,}15 \cdot 10^{-4}\ \%.$$

- Zu dem Ereignis

$$A_2 = \text{„Es werden mindestens zwei aufeinanderfolgende Zahlen gezogen.“}$$

betrachten wir das Gegenereignis

$$\overline{A_2} = \text{„Es werden keine zwei aufeinanderfolgende Zahlen gezogen.“}$$

Um die für $\overline{A_2}$ günstigen Ergebnisse zu bestimmen, betrachten wir modellhaft sechs schwarze (gezogene) Kugeln und 43 weiße (nicht gezogene) Kugeln; wir ordnen die Kugeln so an, daß schwarze Kugeln nicht direkt zusammentreffen:

$$\overset{1}{\ldots}\ s\,w\ \overset{2}{\ldots}\ s\,w\ \overset{3}{\ldots}\ s\,w\ \overset{4}{\ldots}\ s\,w\ \overset{5}{\ldots}\ s\,w\ \overset{6}{\ldots}\ s\ \overset{7}{\ldots}$$

Damit ist zwischen je zwei benachbarten schwarzen Kugeln mindestens eine weiße Kugel als „Puffer“ hinzuzunehmen, insgesamt also fünf weiße Kugeln; damit bleiben $k = 38$ weiße Kugeln übrig, die auf $n = 7$ Blöcke (mit Wiederholung ohne Beachtung der Reihenfolge) verteilt werden können. Wir erhalten $\left|\overline{A_2}\right| = \binom{7+38-1}{38} = \binom{44}{38} = \binom{44}{6}$ und damit

$$P(\overline{A_2}) = \frac{|\overline{A_2}|}{|\Omega|} = \frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}}$$

und folglich

$$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - \frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}} \approx 49{,}52\ \%.$$

b) Wir denken uns die n zufällig ausgewählten Personen in einer Reihung, so daß sich als Ergebnisraum Ω die Menge aller n–Tupel aus den 365 Tagen eines Jahres (unter Vernachlässigung des 29. Februar) mit $|\Omega| = 365^n$ ergibt.

- Wir betrachten das Ereignis

  $A_1 =$ „Mindestens zwei Personen haben am gleichen Tag Geburtstag."

  sowie das Gegenereignis $\overline{A_1}$ von A_1

  $\overline{A_1} =$ „Alle Personen haben an verschiedenen Tagen Geburtstag."

  Damit ist

  $$\left|\overline{A_1}\right| = \underbrace{365}_{\text{1. Person}} \cdot \underbrace{364}_{\text{2. Person}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(365-n+1)}_{n-te \text{ Person}}$$

  und damit

  $$P(\overline{A_1}) = \frac{\left|\overline{A_1}\right|}{|\Omega|} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}$$

  und folglich

  $$P(A_1) = 1 - P(\overline{A_1}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}.$$

- Wir betrachten das Ereignis

  $A_2 =$ „Mindestens eine Person hat am 24. Dezember Geburtstag."

  sowie das Gegenereignis $\overline{A_2}$ von A_2

  $\overline{A_2} =$ „Keine Person hat am 24. Dezember Geburtstag."

  Damit ist

  $$\left|\overline{A_2}\right| = \underbrace{364}_{\text{1. Person}} \cdot \underbrace{364}_{\text{2. Person}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(364)}_{n-te \text{ Person}} = 364^n$$

  und damit

  $$P(\overline{A_2}) = \frac{\left|\overline{A_2}\right|}{|\Omega|} = \frac{364^n}{365^n}$$

  und folglich

  $$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - \frac{364^n}{365^n}.$$

12. a) Wir betrachten eine Urne mit zehn Kugeln, wovon sieben Kugeln schwarz und drei Kugeln weiß sind.

   - Für das Ereignis A erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

     $$P(A) = \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{3}{3} + \binom{7}{3} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{10}{5}}.$$

   - Für das Ereignis B erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

     $$P(A) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3 \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^4 \left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{7}{10}\right)^5.$$

- Für das Ereingnis C erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$P(C) = \left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \frac{7}{10}.$$

b) Wir betrachten das zufällige Drehen eines Glücksrads mit den Ziffern 0 bis 9, die jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit erscheinen; damit ist die Wahrscheinlichkeit für eine gerade bzw. ungerade Ziffer jeweils $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; das Glücksrad wird nun sechsmal unabhängig voneinander gedreht.

- Für das Ereignis A erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

- Für das Ereignis B erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{1}{10}\right)^6 =$$
$$= 6 \cdot \frac{1}{10^5} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{10^6} = \frac{54}{10^6} + \frac{1}{10^6} = \frac{55}{10^6} = \frac{55}{1.000.000} = \frac{11}{200.000}.$$

- Für das Ereignis C erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$P(C) = \underbrace{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}}_{(*)} + \underbrace{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{(**)} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Es gehen folgende Überlegungen ein:

  - Bei $(*)$ werden die drei geraden Ziffern als Block bei den ersten drei Drehungen bzw. bei den letzten drei Drehungen erzielt; deswegen muß die Ziffer, die nach bzw. vor diesem Block gedreht wird, ungerade sein.
  - Bei $(**)$ werden die drei geraden Ziffern als Block bei den Drehungen 2, 3, 4 bzw. bei den Drehungen 3, 4, 5 erzielt; deswegen müssen die Ziffern, die jeweils vor und nach diesem Block gedreht werden, ungerade sein.