MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 2
29.04.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Lösungsvorschlag —

5. a) Für die Darstellung von $q = \frac{2016}{3465} \in \mathbb{Q}$ als vollständig gekürzten Bruch benötigen wir für $z = 2016$ und $n = 3465$ das positive $d \in \operatorname{ggT}(z, n)$. Wir erhalten mit Hilfe des euklidischen Algorithmus

$$\begin{aligned} 3465 &= 1 \cdot 2016 + 1449 \\ 2016 &= 1 \cdot 1449 + 567 \\ 1449 &= 2 \cdot 567 + 315 \\ 567 &= 1 \cdot 315 + 252 \\ 315 &= 1 \cdot 252 + 63 \\ 252 &= 4 \cdot 63 \end{aligned}$$

also $d = 63$, und folglich die vollständig gekürzten Bruchdarstellung

$$q = \frac{2016}{3465} = \frac{2016 : 63}{3465 : 63} = \frac{32}{55}.$$

b) Man erkennt sofort

$$q_1 = \frac{37}{44} > 0, \quad q_2 = \frac{61}{49} > 0, \quad q_3 = -\frac{19}{32} < 0 \quad \text{und} \quad q_4 = \frac{91}{73} > 0$$

sowie

$$q_1 = \frac{37}{44} < 1, \quad q_2 = \frac{61}{49} > 1 \quad \text{und} \quad q_4 = \frac{91}{73} > 1;$$

wegen

$$61 \cdot 73 = 4453 < 4459 = 91 \cdot 49 \qquad \text{gilt} \qquad q_2 = \frac{61}{49} < \frac{91}{73} = q_4.$$

Damit ergibt sich bezüglich der Ordnung $<$ insgesamt die folgende Reihung:

$$q_3 = -\frac{19}{32} < q_1 = \frac{37}{44} < q_2 = \frac{61}{49} < q_4 = \frac{91}{73}.$$

c) Für $q_1 = \frac{7}{15}$ und $q_2 = \frac{9}{50} \in \mathbb{Q}$ erhält man

$$\begin{array}{rcccccccc}
q_1 + q_2 & = & \dfrac{7}{15} + \dfrac{9}{50} & = & \dfrac{7 \cdot 50 + 9 \cdot 15}{15 \cdot 50} & = & \dfrac{485}{750} & = & \dfrac{97}{150} \\
q_1 - q_2 & = & \dfrac{7}{15} - \dfrac{9}{50} & = & \dfrac{7 \cdot 50 - 9 \cdot 15}{15 \cdot 50} & = & \dfrac{215}{750} & = & \dfrac{43}{150} \\
q_1 \cdot q_2 & = & \dfrac{7}{15} \cdot \dfrac{9}{50} & = & \dfrac{7 \cdot 9}{15 \cdot 50} & = & \dfrac{63}{750} & = & \dfrac{21}{250} \\
\dfrac{q_1}{q_2} & = & \dfrac{7}{15} \div \dfrac{9}{50} & = & \dfrac{7 \cdot 50}{9 \cdot 15} & = & \dfrac{350}{135} & = & \dfrac{70}{27}
\end{array}$$

und für die Primzahl $p = 3$ ergibt sich damit in

$$\begin{array}{rcccll}
q_1 & = & \dfrac{7}{15} & = & 3^{-1} \cdot \dfrac{7}{5} & \text{die Vielfachheit} \quad e = -1, \\
q_2 & = & \dfrac{9}{50} & = & 3^{2} \cdot \dfrac{1}{50} & \text{die Vielfachheit} \quad e = 2, \\
q_1 + q_2 & = & \dfrac{97}{150} & = & 3^{-1} \cdot \dfrac{97}{50} & \text{die Vielfachheit} \quad e = -1, \\
q_1 - q_2 & = & \dfrac{43}{150} & = & 3^{-1} \cdot \dfrac{43}{50} & \text{die Vielfachheit} \quad e = -1, \\
q_1 \cdot q_2 & = & \dfrac{21}{250} & = & 3^{1} \cdot \dfrac{7}{250} & \text{die Vielfachheit} \quad e = 1, \\
\dfrac{q_1}{q_2} & = & \dfrac{70}{27} & = & 3^{-3} \cdot \dfrac{70}{1} & \text{die Vielfachheit} \quad e = -3.
\end{array}$$

6. Auf der Menge $\mathbb{Q} = \{z/n \mid z \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$ aller Bruchzahlen mit

$$z_1/n_1 = z_2/n_2 \iff z_1 \cdot n_2 = z_2 \cdot n_1$$

ist gemäß der Vorlesung durch

$$z_1/n_1 < z_2/n_2 \iff z_1 \cdot n_2 < z_2 \cdot n_1$$

eine Relation $<$ wohldefiniert.

a) Zum Nachweis der Trichotomie seien z_1/n_1 und $z_2/n_2 \in \mathbb{Q}$; damit tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein:

- es ist $z_1 \cdot n_2 < z_2 \cdot n_1$, und somit gilt $z_1/n_1 < z_2/n_2$;
- es ist $z_1 \cdot n_2 = z_2 \cdot n_1$, und somit gilt $z_1/n_1 = z_2/n_2$;
- es ist $z_1 \cdot n_2 > z_2 \cdot n_1$, und somit gilt $z_1/n_1 > z_2/n_2$;

folglich ist $<$ trichotom. Zum Nachweis der Transitivität seien z_1/n_1, z_2/n_2 und $z_3/n_3 \in \mathbb{Q}$ mit $z_1/n_1 < z_2/n_2$ und $z_2/n_2 < z_3/n_3$, also

$$z_1 \cdot n_2 < z_2 \cdot n_1 \quad \text{und} \quad z_2 \cdot n_3 < z_3 \cdot n_2;$$

damit ergibt sich

$$(z_1 \cdot n_3) \cdot n_2 = (z_1 \cdot n_2) \cdot n_3 \underset{n_3>0}{<} (z_2 \cdot n_1) \cdot n_3 = \\ = (z_2 \cdot n_3) \cdot n_1 \underset{n_1>0}{<} (z_3 \cdot n_2) \cdot n_1 = (z_3 \cdot n_1) \cdot n_2,$$

wegen $n_2 > 0$ somit

$$z_1 \cdot n_3 < z_3 \cdot n_1, \qquad \text{also} \qquad z_1/n_1 < z_3/n_3;$$

folglich ist $<$ transitiv. Dementsprechend ist auch $\leq$ eine totale Ordnung auf der Menge $\mathbb{Q}$ gemäß der Definition 8.3 der Vorlesung.

b) Zum Nachweis der Monotoniegesetze seien z_1/n_1, z_2/n_2 und $z_3/n_3 \in \mathbb{Q}$ mit

$$z_1/n_1 < z_2/n_2, \qquad \text{also} \qquad z_1 \cdot n_2 < z_2 \cdot n_1.$$

Für das Monotoniegesetz der Addition betrachten wir die beiden Summen

$$\begin{aligned} z_1/n_1 + z_3/n_3 &= (z_1 \cdot n_3 + z_3 \cdot n_1)/(n_1 \cdot n_3) \\ z_2/n_2 + z_3/n_3 &= (z_2 \cdot n_3 + z_3 \cdot n_2)/(n_2 \cdot n_3); \end{aligned}$$

wegen $n_3^2 > 0$ ergibt sich

$$(z_1 \cdot n_3 + z_3 \cdot n_1) \cdot (n_2 \cdot n_3) = (z_1 \cdot n_2) \cdot n_3^2 + z_3 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 < \\ < (z_2 \cdot n_1) \cdot n_3^2 + z_3 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = (z_2 \cdot n_3 + z_3 \cdot n_2) \cdot (n_1 \cdot n_3),$$

und wir erhalten

$$z_1/n_1 + z_3/n_3 = (z_1 \cdot n_3 + z_3 \cdot n_1)/(n_1 \cdot n_3) < \\ < (z_2 \cdot n_3 + z_3 \cdot n_2)/(n_2 \cdot n_3) = z_2/n_2 + z_3/n_3.$$

Für das Monotoniegesetz der Multiplikation betrachten wir unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$z_3/n_3 > 0/1, \qquad \text{also} \qquad z_3 \cdot 1 > 0 \cdot n_3 \quad \text{bzw.} \quad z_3 > 0,$$

die beiden Produkte

$$\begin{aligned} z_1/n_1 \cdot z_3/n_3 &= (z_1 \cdot z_3)/(n_1 \cdot n_3) \\ z_2/n_2 \cdot z_3/n_3 &= (z_2 \cdot z_3)/(n_2 \cdot n_3); \end{aligned}$$

wegen $z_3 \cdot n_3 > 0$ ergibt sich

$$(z_1 \cdot z_3) \cdot (n_2 \cdot n_3) = (z_1 \cdot n_2) \cdot (z_3 \cdot n_3) < (z_2 \cdot n_1) \cdot (z_3 \cdot n_3) = (z_2 \cdot z_3) \cdot (n_1 \cdot n_3),$$

und wir erhalten

$$z_1/n_1 \cdot z_3/n_3 = (z_1 \cdot z_3)/(n_1 \cdot n_3) < (z_2 \cdot z_3)/(n_2 \cdot n_3) = z_2/n_2 \cdot z_3/n_3.$$

Damit ist $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ ein angeordneter Körper.

7. Wir zeigen für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ und $n \geq 2$, daß durch die Zuordnung

$$\mathbb{Z}_n \ni \overline{x} \mapsto \overline{x} \in \mathbb{Z}_m$$

genau dann eine Abbildung $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ definiert wird, wenn m ein Teiler von n ist.

- Für „ $\Longrightarrow$ “ sei $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ mit $\overline{x} \mapsto \overline{x}$ eine (wohldefinierte) Abbildung. Es gilt $\overline{0} = \overline{n}$ in $\mathbb{Z}_n$ und damit auch $\overline{0} = \overline{n}$ in $\mathbb{Z}_m$; folglich ist m ein Teiler von n.
- Für „$\Longleftarrow$“ sei m ein Teiler von n. Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\overline{x} = \overline{y}$ in $\mathbb{Z}_n$ gilt $n \mid (x - y)$; damit gilt auch $m \mid (x - y)$, und es folgt $\overline{x} = \overline{y}$ in $\mathbb{Z}_m$. Damit ist f eine (wohldefinierte) Abbildung.

8. Für eine fest gewählte Primzahl p betrachten wir die Teilmenge

$$R = \left\{ \frac{z}{n} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; z \in \mathbb{Z} \text{ und } p \nmid n \in \mathbb{N} \right\}$$

der Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen; damit enthält die Menge R alle rationalen Zahlen $q \in \mathbb{Q}$, die eine Bruchdarstellung $q = \frac{z}{n}$ mit einem Zähler $z \in \mathbb{Z}$ und einem nicht durch p teilbaren Nenner $n \in \mathbb{N}$ besitzen, d.h. die Vielfachheit e von p in q ist nichtnegativ.

a) Seien $r = \frac{z_1}{n_1}$ und $s = \frac{z_2}{n_2} \in R$ mit $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ und $p \nmid n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Da p eine Primzahl ist, folgt aus $p \nmid n_1$ und $p \nmid n_2$ schon $p \nmid n_1 \cdot n_2$, und wir erhalten

$$r + s = \frac{z_1}{n_1} + \frac{z_2}{n_2} = \frac{\overbrace{z_1 \cdot n_2 + z_2 \cdot n_1}^{\in \mathbb{Z}}}{\underbrace{n_1 \cdot n_2}_{p \nmid n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}}} \in R$$

sowie

$$r \cdot s = \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_2}{n_2} = \frac{\overbrace{z_1 \cdot z_2}^{\in \mathbb{Z}}}{\underbrace{n_1 \cdot n_2}_{p \nmid n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}}} \in R.$$

Damit ist R bezüglich der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$ von $\mathbb{Q}$ abgeschlossen.

b) Wir weisen für $(R, +, \cdot)$ die Rechengesetze eines kommutativen Ringes nach:

- Das Assoziativgesetz und Kommutativgesetz der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$ sowie die beiden Distributivgesetze vererben sich von $\mathbb{Q}$ sofort auf die Teilmenge R von $\mathbb{Q}$.
- Wegen $0 \in \mathbb{Z}$ bzw. $1 \in \mathbb{Z}$ sowie $p \nmid 1 \in \mathbb{N}$ liegen das Nullelement $0 = \frac{0}{1}$ bzw. das Einselement $1 = \frac{1}{1}$ von $\mathbb{Q}$ auch in R.
- Für $r = \frac{z}{n} \in R$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $p \nmid n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $-z \in \mathbb{Z}$ schon $-r = \frac{-z}{n} \in R$; damit enthält R mit jedem Element $r \in R$ auch das additiv inverse Element $-r \in R$.

Insgesamt ist $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring.

c) Der kommutative Ring $(R, +, \cdot)$ ist ein Körper, wenn zusätzlich $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist, also zu jedem $r = \frac{z}{n} \in R$ mit $0 \neq z \in \mathbb{Z}$ und $p \nmid n \in \mathbb{N}$ das multiplikativ inverse Element $r^{-1} \in \mathbb{Q}$ schon in R liegt.

Für $r = \frac{p}{1}$ gilt wegen $0 \neq p \in \mathbb{Z}$ und $p \nmid 1 \in \mathbb{N}$ zwar $0 \neq r \in R$, aber für das in $\mathbb{Q}$ existierende multiplikativ Inverse $r^{-1} = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 = r \cdot r^{-1} = \frac{p}{1} \cdot \frac{z}{n} = \frac{p \cdot z}{1 \cdot n},$$

also $p \cdot z = n$ und damit $p \mid n$, also $r^{-1} \notin R$. Folglich ist $(R, +, \cdot)$ kein Körper.