MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Klausur
08.10.2013

Klausur zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Wir zeigen anhand der Definition, daß die Relation

$$R = \big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \cos^2 x + \sin^2 y = 1\big\}$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{R}$ ist; wir greifen dabei mehrmals auf die bekannte Beziehung

$$(*) \qquad \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}$$

(„trigonometrischer Pythagoras“) zurück.

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ gemäß $(*)$, also ist $(x,x) \in R$; damit ist R reflexiv.
- Für alle x, $y \in \mathbb{R}$ mit $(x,y) \in R$ gilt $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$. Gemäß $(*)$ ist $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ als auch $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, und wir erhalten

$$\cos^2 y + \sin^2 x = \big(1 - \sin^2 y\big) + \big(1 - \cos^2 x\big) = \\ = 2 - \big(\cos^2 x + \sin^2 y\big) = 2 - 1 = 1,$$

also ist $(y,x) \in R$; damit ist R symmetrisch.
- Für alle x, y, $z \in \mathbb{R}$ mit $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$ gilt

$$\cos^2 x + \sin^2 y = 1 \qquad \text{und} \qquad \cos^2 y + \sin^2 z = 1.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir

$$\cos^2 x + (\sin^2 y + \cos^2 y) + \sin^2 z = 2,$$

mit $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ gemäß $(*)$ damit

$$\cos^2 x + 1 + \sin^2 z = 2 \qquad \text{bzw.} \qquad \cos^2 x + \sin^2 z = 1,$$

also ist $(x,z) \in R$; damit ist R transitiv.

Wir bestimmen nun die Äquivalenzklasse $\overline{0}$ des Elements $0 \in \mathbb{R}$. Es ist

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{y \in \mathbb{R} \mid (0,y) \in R\} \\ &= \big\{y \in \mathbb{R} \mid \cos^2 0 + \sin^2 y = 1\big\} \\ &= \big\{y \in \mathbb{R} \mid 1 + \sin^2 y = 1\big\} \\ &= \big\{y \in \mathbb{R} \mid \sin^2 y = 0\big\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid \sin y = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid y = k\,\pi \ \text{ mit } \ k \in \mathbb{Z}\}\,. \end{aligned}$$

b) Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ \frac{x-1}{x+1} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}_0^+ \right\}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ gilt

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1},$$

so daß wir wegen $1 \leq x+1$ dann

$$0 < \frac{2}{x+1} \leq 2 \qquad \text{und damit} \qquad -1 \leq \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} < 1$$

erhalten; folglich ist M (etwa durch -1) nach unten sowie (etwa durch 1) nach oben beschränkt, wobei wegen $-1 \in M$ (für $x = 0$) schon $\inf M = -1$ ist. Für alle $b' \in \mathbb{R}$ mit $b' < 1$ gilt $1 - b' > 0$, und für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ gilt

$$\frac{x-1}{x+1} > b' \underset{x+1>0}{\iff} x - 1 > (x+1) \cdot b' \iff x - 1 > x \cdot b' + b' \iff$$
$$\iff x - x \cdot b' > b' + 1 \iff x \cdot (1 - b') > b' + 1 \underset{1-b'>0}{\iff} x > \frac{b'+1}{1-b'};$$

damit gibt es ein $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $\frac{x-1}{x+1} > b'$, so daß b' keine obere Schranke von M sein kann, und folglich gilt $\sup M = 1$.
Wegen $\inf M = -1 \in M$ gilt schon $\inf M = \min M$; wegen $\frac{x-1}{x+1} < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ ist $\sup M = 1 \notin M$, so daß M kein Maximum besitzt.

2. a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein (endlicher) Wahrscheinlichkeitsraum. Der Ergebnisraum Ω umfaßt alle möglichen Ergebnisse $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ des Zufallsexperiments, und der Ereignisraum $\mathcal{A}$ aller möglichen Ereignisse stimmt mit der Potenzmenge $P(\Omega)$ des Ergebnisraumes Ω überein. Jedem Ereignis $A \in \mathcal{A}$ wird eine reelle Zahl $P(A) \in [0;1]$ als Wahrscheinlichkeit zugeordnet; dabei gilt:

   - Es ist $P(\Omega) = 1$.
   - Für alle $A,\, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

   b) Wir betrachten ein Kartendeck aus 52 Karten; dabei treten die vier Farben $\spadesuit$, $\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\clubsuit$ in den 13 Werten 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A auf. Das Kartendeck wird gemischt und die oberen zwölf Karten nacheinander aufgedeckt.

   - Unter den zwölf aufgedeckten Karten befinden sich genau die vier Könige, die übrigen acht aufgedeckten Karten sind beliebig aus den verbleibenden 48 Karten zu wählen. Damit erhalten wir

$$P(A) = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{8}}{\binom{52}{12}}.$$

- Für die erste Karte stehen alle 52 Möglichkeiten ohne jegliche Einschränkung zur Wahl, während für die zweite Karte nur noch 48 der verbleibenden 51 Karten zur Auswahl stehen, da der Wert der ersten aufgedeckten Karte nicht mehr gewählt werden darf. Für die verbleibenden zehn aufzudeckenden Karten argumentiert man analog. Damit erhalten wir

$$P(B) = \frac{52}{52} \cdot \frac{48}{51} \cdot \frac{44}{50} \cdot \ldots \cdot \frac{16}{43} \cdot \frac{12}{42} \cdot \frac{8}{41}.$$

- Für die erste Karte gibt es 39 Möglichkeiten von den insgesamt 52 Karten, da die 13 Werte mit der Farbe Herz nicht gewählt werden dürfen. Entsprechend gibt es für die zweite Karte noch 38 Möglichkeiten von den verbleibenden 51 Karten. Für die verbleibenden fünf aufzudeckenden Karten argumentiert man analog. Die achte Karte hat die Farbe Herz, wofür es 13 Möglichkeiten von den verbleibenden 45 Karten gibt. Damit erhalten wir

$$P(C) = \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} \cdot \ldots \cdot \frac{33}{46} \cdot \frac{13}{45}.$$

  Alternativ wählt man für die ersten sieben Karten entsprechend sieben aus den 39 möglichen Karten, die Argumentation für die achte Karte ist analog zu oben. Damit erhalten wir

$$P(C) = \frac{\binom{39}{7}}{\binom{52}{7}} \cdot \frac{13}{45}.$$

3. a) Wir betrachten ein beliebiges Dreieck ΔABC mit den üblichen Bezeichungen für die Seitenlängen und Innenwinkel. Für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC gilt

$$F = \frac{c}{2} \cdot h_c = \frac{c}{2} \cdot b \cdot \sin\alpha;$$

ferner gilt nach dem Sinussatz

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad \text{bzw.} \qquad b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

und damit

$$F = \frac{c}{2} \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{c}{2} \cdot \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} \cdot \sin\alpha = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}.$$

b) Zwei Punktmengen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ der Anschauungsebene (mit der Punktmenge $\mathcal{P}$) heißen kongruent, wenn es eine Kongruenzabbildung $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ mit $f(\mathcal{M}) = \mathcal{M}'$ gibt. Zwei Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ sind nun genau dann kongruent, wenn gilt:

- Es ist $a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$. (SSS–Satz)
- Es ist $\alpha = \alpha'$, $b = b'$ und $c = c'$. (SWS–Satz)
- Es ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $c = c'$. (WSW–Satz)

c) Die erste Aussage ist wahr, die zweite hingegen falsch; wir beweisen zunächst die erste und widerlegen dann die zweite Behauptung.

- Sind die beiden Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ kongruent, so stimmen sie nach dem SWS–Satz in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Innenwinkel überein, es gilt also $\alpha = \alpha'$, $b = b'$ und $c = c'$ und damit nach der bekannten Flächenformel

$$F_{\Delta ABC} = \frac{c}{2} \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{c'}{2} \cdot b' \cdot \sin \alpha' = F_{\Delta A'B'C'}.$$

  Alternativ läßt sich aus der Kongruenz der beiden Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ gemäß dem WSW–Satz folgern, daß sie in einer Seitenlänge und den beiden anliegenden Innenwinkel übereinstimmen, es gilt also $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $c = c'$; damit stimmen sie auch im dritten Innenwinkel $\gamma = \gamma'$ überein, und nach Teilaufgabe a) ergibt sich

$$F_{\Delta ABC} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{c'^2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha' \cdot \sin \beta'}{\sin \gamma'} = F_{\Delta A'B'C'}.$$

  Schließlich ließe sich von der Kongruenz der beiden Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ zunächst über den SSS–Satz auf $a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$ und dann mit Hilfe der Formel von Heron auf die Flächengleichheit $F_{\Delta ABC} = F_{\Delta A'B'C'}$ schließen.

- Die beiden rechtwinkligen Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ mit den rechten Winkeln $\gamma = 90° = \gamma'$ und den Kathetenlängen $a = 8$ und $b = 3$ bzw. $a' = 12$ und $b' = 2$ besitzen zwar gemäß $F_{\Delta ABC} = 12 = F_{\Delta A'B'C'}$ den gleichen Flächeninhalt, sind aber aufgrund unterschiedlicher Seitenlängen gemäß dem SSS–Satz nicht kongruent.

4. a) Seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ fest gewählt.

- Die Abbildung $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ beschreibt in der Gaußschen Zahlenebene eine Achsenspiegelung an der Realteilachse.
- Die Abbildung $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + b$ beschreibt in der Gaußschen Zahlenebene eine Verschiebung (Translation) um $b \in \mathbb{C}$.
- Die Abbildung $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a\,z$ beschreibt in der Gaußschen Zahlenebene eine Drehung mit dem Ursprung als Drehzentrum und dem Drehwinkel φ, wobei $a = E(\varphi)$ ist.

b) Wir führen die gegebene Gleichung

$$\left(z^2 + 2\,z\right)^2 + 7 \cdot \left(z^2 + 2\,z\right) = 30$$

über der Grundmenge $\mathbb{C}$ durch die Substitution $u = z^2 + 2\,z$ in die quadratische Gleichung $u^2 + 7\,u = 30$ über; diese besitzt wegen

$$\begin{aligned} u^2 + 7\,u = 30 &\iff u^2 + 7\,u - 30 = 0 \iff \\ &\iff (u - 3) \cdot (u + 10) = 0 \iff (u = 3 \;\text{ oder }\; u = -10) \end{aligned}$$

die beiden Lösungen $u = 3$ und $u = -10$; durch Resubstitution erhalten wir

$$z^2 + 2z = 3 \iff z^2 + 2z + 1 = 4 \iff (z+1)^2 = 2^2 \iff \\ \iff z + 1 = \pm 2 \iff (z = 1 \text{ oder } z = -3)$$

und

$$z^2 + 2z = -10 \iff z^2 + 2z + 1 = -9 \iff \\ \iff (z+1)^2 = (3i)^2 \iff z + 1 = \pm 3i \iff z = -1 \pm 3i,$$

also die beiden reellen Lösung $z = 1$ und $z = -3$ und die beiden konjugiert–komplexen Lösungen $z = -1 + 3i$ und $z = -1 - 3i$.

c) Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, daß jedes nichtkonstante Polynom

$$p = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$$

mit komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ eine komplexe Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ besitzt und damit vollständig in Linearfaktoren zerfällt, es ist also

$$p = (X - z_1)^{e_1} \cdot \ldots \cdot (X - z_r)^{e_r}$$

mit den Nullstellen $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ der Vielfachheiten $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$.
Die Aussage ist falsch, jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ mit $\mathrm{Grad}(p) = 2013$ besitzt stets eine reelle Nullstelle. Für ein nichtkonstantes Polynom

$$p = a_n X^n + a_{n-1} X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ ohne reelle Nullstelle ergibt sich nämlich als Konsequenz aus dem Fundamentalsatz der Algebra eine Faktorisierung

$$p = q_1^{f_1} \cdot \ldots \cdot q_s^{f_s}$$

mit reellen quadratischen Polynomen $q_1, \ldots, q_s$ (ohne reelle Nullstelle) der Vielfachheiten $f_1 \ldots, f_s \in \mathbb{N}$; damit gilt aber

$$\mathrm{Grad}(p) = \mathrm{Grad}(q_1^{f_1}) + \ldots + \mathrm{Grad}(q_s^{f_s}) = 2 \cdot (f_1 + \ldots + f_s)\,,$$

es besitzt p also einen geraden $\mathrm{Grad}(p)$. Somit kann ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ mit dem ungeraden $\mathrm{Grad}(p) = 2013$ nicht ohne reelle Nullstelle sein.