MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Klausur
30.07.2013

Klausur zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Wir zeigen, daß die Relation

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists\, a,\, b \in \mathbb{N}:\ y = a \cdot x^b\}$$

eine Ordnung auf der Menge $\mathbb{N}$ ist.

- Für alle $x \in \mathbb{N}$ ist $x = 1 \cdot x^1$, damit erhalten wir für $a = 1$ und $b = 1$ die Beziehung $x = a \cdot x^b$, also ist $(x,x) \in R$; damit ist R reflexiv.
- Für alle $x,\, y \in \mathbb{N}$ mit $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R$ ergibt sich

$$\exists\, a,\, b \in \mathbb{N}:\ y = a \cdot x^b \quad \text{und} \quad \exists\, c,\, d \in \mathbb{N}:\ x = c \cdot y^d.$$

Da a, b, c, d, x, $y \in \mathbb{N}$, folgt aus $y = a \cdot x^b$ bzw. $x = c \cdot y^d$ die Beziehung $y \geq x$ bzw. $x \geq y$, also ist $x = y$; damit ist R antisymmetrisch.
- Für alle $x,\, y,\, z \in \mathbb{N}$ mit $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$ ergibt sich

$$\exists\, a,\, b \in \mathbb{N}:\ y = a \cdot x^b \quad \text{und} \quad \exists\, c,\, d \in \mathbb{N}:\ z = c \cdot y^d;$$

mit $y = a \cdot x^b$ erhalten wir

$$z = c \cdot y^d = c \cdot \left(a \cdot x^b\right)^d = c \cdot a^d \cdot x^{b \cdot d}$$

mit $c \cdot a^d \in \mathbb{N}$ und $b \cdot d \in \mathbb{N}$, also ist $(x,z) \in R$; damit ist R transitiv.

b) Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Teilmenge.

- Ist M nun nach unten beschränkt, so heißt eine größte untere Schranke $c_0 \in K$ das Infimum von M.
- Ist M nun nach oben beschränkt, so heißt eine kleinste obere Schranke $b_0 \in K$ das Supremum von M.

Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ 1 + \frac{1}{n+m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Es gilt $1 < 1 + \frac{1}{n+m} \leq \frac{3}{2}$ für alle n, $m \in \mathbb{N}$; folglich ist M (etwa durch 1) nach unten sowie (etwa durch $\frac{3}{2}$) nach oben beschränkt, wobei wegen $\frac{3}{2} \in M$

schon $\sup M = \frac{3}{2}$ ist. Für alle $b \in \mathbb{R}$ mit $1 < b$ ist $0 < b - 1$, und nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b - 1$; damit ergibt sich

$$1 + \frac{1}{n+m} \leq 1 + \frac{1}{n} < 1 + (b-1) = b,$$

so daß b keine untere Schranke von M sein kann. Folglich ist 1 die größte untere Schranke von M, also $\inf M = 1$.

Wegen $\sup M = \frac{3}{2} \in M$ gilt schon $\sup M = \max M$; wegen

$$1 + \frac{1}{n+m} \neq 1 \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}$$

ist aber $\inf M = 1 \notin M$, so daß M kein Minimum besitzt.

2. a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein (endlicher) Wahrscheinlichkeitsraum sowie A, $B \in \mathcal{A}$ mit $0 < P(B) < 1$.

   - Ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ tritt unter der Bedingung, daß B eintritt, mit der relativen Wahrscheinlichkeit

     $$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

     ein.
   - Die beiden Ereignisse A, $B \in \mathcal{A}$ heißen stochastisch unabhängig, wenn

     $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

     gilt.

   Wir zeigen nun die Beziehung

   $$P_B(A) < P(A) \implies P(A) < P_{\overline{B}}(A).$$

   Mit $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B})$ und $0 < P(\overline{B}) < 1$ ist

   $$\begin{aligned}
   P_B(A) < P(A) \quad &\implies \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} < P(A) \\
   &\implies \quad P(A \cap B) < P(A) \cdot P(B) \\
   &\implies \quad P(A) - P(A \cap \overline{B}) < P(A) \cdot \big(1 - P(\overline{B})\big) \\
   &\implies \quad P(A) - P\left(A \cap \overline{B}\right) < P(A) - P(A) \cdot P(\overline{B}) \\
   &\implies \quad P(A) \cdot P(\overline{B}) < P\left(A \cap \overline{B}\right) \\
   &\implies \quad P(A) < \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \\
   &\implies \quad P(A) < P_{\overline{B}}(A).
   \end{aligned}$$

   b) Wir betrachten den Ergebnisraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; unter der vorausgesetzten Gleichverteilung gilt $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$ für alle $E \in \mathcal{A}$. Die beiden

Ereignisse $A = \{2,3,5,7\}$ und $B = \{3,4,5,6\}$ mit $A \cap B = \{3,5\}$ sind zunächst wegen

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$$

stochastisch unabhängig. Ferner bestimmen wir nun die Anzahl der Ereignisse $C \in \mathcal{A}$, für die die drei Ereignisse A, B, C stochastisch unabhängig sind; hierfür müssen neben der bereits gezeigten Bedingung

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

die Beziehungen

$$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot P(C) = P(A \cap C)$$

und

$$P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot P(C) = P(B \cap C)$$

sowie

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4} \cdot P(C) = P(A \cap B \cap C)$$

gelten. Es ist $(A \cap B \cap C) \subseteq \{3,5\}$, und wir treffen hinsichtlich der Mächtigkeit von $A \cap B \cap C$ die folgende Fallunterscheidung:

- In Fall 1 sei $|A \cap B \cap C| = 0$, also $P(A \cap B \cap C) = 0$; damit ist $\frac{1}{4} \cdot P(C) = P(A \cap B \cap C)$ zu $P(C) = 0$, also $C = \emptyset$, gleichwertig, und es gibt in diesem Fall genau eine Möglichkeit für C.
- In Fall 2 sei $|A \cap B \cap C| = 2$, also $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$; damit ist $\frac{1}{4} \cdot P(C) = P(A \cap B \cap C)$ zu $P(C) = 1$, also $C = \Omega$, gleichwertig, und es gibt in diesem Fall genau eine Möglichkeit für C.
- In Fall 3 sei $|A \cap B \cap C| = 1$, also $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$; damit ist $\frac{1}{4} \cdot P(C) = P(A \cap B \cap C)$ zu $P(C) = \frac{1}{2}$, also $|C| = 4$, gleichwertig, und wegen

  $$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4}$$

  ergeben sich ferner $|A \cap C| = 2$ und $|B \cap C| = 2$. Wir bestimmen nun die Anzahl der Ereignisse C mit diesen Eigenschaften. Wegen

  $$|A \cap B \cap C| = 1$$

  wählen eine der beiden Zahlen 3 und 5 in $A \cap B$; dafür haben wir zwei Möglichkeiten, und für jede Wahl ist für $A \cap C$ bzw. $B \cap C$ bereits genau ein Element festgelegt. Wegen

  $$|A \cap C| = 2 \qquad \text{und} \qquad |B \cap C| = 2$$

  wählen wir nun jeweils eine der beiden Zahlen von A und B, welche nicht im Schnitt $A \cap B$ liegen; dabei haben wir für A die beiden Möglichkeiten

2 oder 7 bzw. für B die beiden Möglichkeiten 4 oder 6. Damit liegen nun von C genau drei Elemente fest. Schließlich wählen wir wegen $|C| = 4$ noch eine der beiden Zahlen 1 oder 8, die weder Elemente von A noch B sind; hierfür haben wir wiederum zwei Möglichkeiten. Damit gibt es in diesem Fall genau $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ Möglichkeiten für C.

Insgesamt ergeben sich genau $1+1+16 = 18$ Möglichkeiten, für die die drei Ereignisse A, B, C stochastisch unabhängig sind.

3. a) Für ein beliebiges Dreieck ΔABC mit den Innenwinkeln α, β und γ und den Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$ und $c = \overline{AB}$ gilt:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Für den Schnittpunkt D der Winkelhalbierenden von γ mit der Seite $[AB]$ zeigen wir nun die Beziehung

$$\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{BC}.$$

Sei dazu $\overline{AD} = u$ und $\overline{DB} = v$ sowie $\sphericalangle CDA = \delta$ und $\sphericalangle BDC = 180° - \delta$. Im Dreieck ΔADC gilt nach dem Sinussatz

$$\frac{u}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\sin\delta}$$

sowie im Dreieck ΔDBC wiederum nach dem Sinussatz

$$\frac{v}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\sin(180° - \delta)}.$$

Wegen $\sin\delta = \sin(180° - \delta)$ gilt dann

$$\frac{u}{v} = \frac{b}{a} \qquad \text{also} \qquad \overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{BC}.$$

b) Wir betrachten das gleichschenklige Dreieck ΔABC mit $s = \overline{AC} = \overline{BC}$ und $b = \overline{AB}$; zudem sei H_a der Höhenfußpunkt von A auf BC mit $h_a = \overline{AH_a}$ sowie H_c der Höhenfußpunkt von C auf AB mit $h_c = \overline{CH_c}$.

Die Dreiecke ΔABH_a und ΔBCH_c stimmen in den beiden Innenwinkeln $\sphericalangle H_aBA = \sphericalangle CBH_c$ und $\sphericalangle AH_aB = 90° = \sphericalangle BH_cC$ und wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck auch im dritten Innenwinkel $\sphericalangle BAH_a = \sphericalangle H_cCB$ überein und sind daher ähnlich; folglich gilt

$$\frac{s}{h_c} = \frac{b}{h_a}.$$

Da das Dreieck ΔABC gleichschenklig ist, teilt H_c die Seite $[AB]$ im Verhältnis 1:1, und es gilt $\overline{AH_c} = \overline{H_cB} = \frac{b}{2}$, und im rechtwinkligen Dreieck ΔBCH_c ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras

$$s^2 = h_c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Mit $h_a = 6$ und $h_c = 5$ erhalten wir

$$\frac{s}{h_c} = \frac{b}{h_a} \iff s = \frac{h_c}{h_a} \cdot b = \frac{5}{6} \cdot b$$

und damit

$$s^2 = h_c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \iff \left(\frac{5}{6}\,b\right)^2 = h_c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \iff$$
$$\iff \frac{4}{9}\,b^2 = h_c^2 \iff b^2 = \frac{25 \cdot 9}{4} \iff b = \frac{15}{2};$$

wegen $s = \frac{5}{6} \cdot b$ ergibt sich schließlich

$$s = \frac{5}{6} \cdot b = \frac{5}{6} \cdot \frac{15}{2} = \frac{25}{4}.$$

4. a) Sei $(K[X], +, \cdot)$ der Polynomring über dem Körper $(K, +, \cdot)$ sowie $p \in K[X]$ mit $\mathrm{Grad}(p) \geq 1$ und $a \in K$.

- Ein Element $a \in K$ heißt Nullstelle des Polynoms $p \in K[X]$, wenn es gemäß $f_p(a) = 0$ eine Nullstelle der Polynomabbildung ist; alternativ können wir auch die folgende Definition treffen: es ist a genau dann eine Nullstelle von p, wenn es ein $s \in K[X]$ mit $p = (X - a) \cdot s$ gibt.
- Ist a eine Nullstelle von p, so gibt es ein $e \in \mathbb{N}$ und ein $s_0 \in K[X]$ mit $p = (X-a)^e \cdot s_0$; ist a keine Nullstelle von s_0, so ist e eindeutig bestimmt und heißt die Vielfachheit von a als Nullstelle von p.

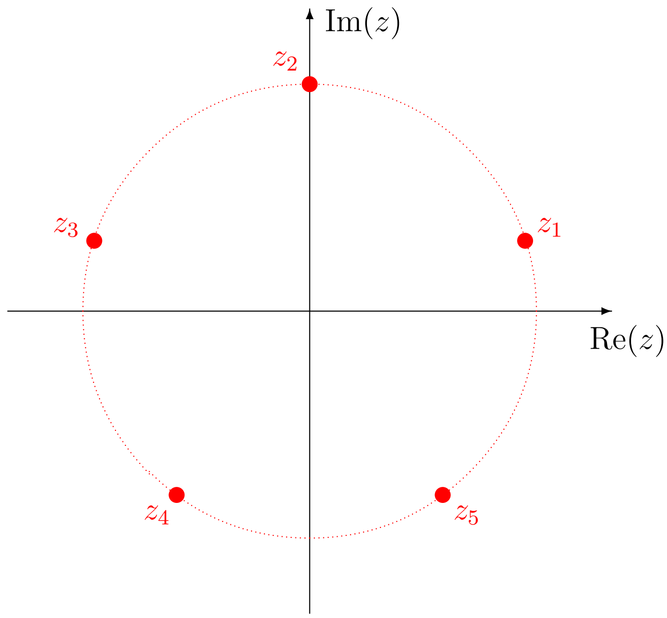
b) Wir betrachten das Polynom $p = X^5 - i \in \mathbb{C}[X]$ und bestimme die Nullstellen von p. Die Nullstlellen sind genau die Lösungen der Polynomgleichung $z^5 - i = 0$, also

$$\begin{aligned}
z^5 - i = 0 \quad &\iff \quad z^5 = i \\
&\iff \quad z^5 = E(90^\circ) \\
&\iff \quad z = E\left(\frac{90^\circ}{5}\right) \cdot E\left(k \cdot \frac{360^\circ}{5}\right) \\
&\iff \quad z = E(18^\circ) \cdot E(k \cdot 72^\circ) \\
&\iff \quad z = E(18^\circ + k \cdot 72^\circ)
\end{aligned}$$

mit $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Es ergeben sich genau die fünf verschiedenen Lösungen

$$z_1 = E(18^\circ), z_2 = E(90^\circ), z_3 = E(162^\circ), z_4 = E(234^\circ), z_5 = E(306^\circ),$$

also die Nullstelle von p in Polardarstellung. Diese liegen in der Gaußschen Zahlenebene auf dem Einheitskreis und bilden die Eckpunkte eines regulären Fünfecks; es ergibt sich die folgende Skizze:



c) Wir betrachten in Abhängigkeit von den positiven reellen Parametern a_1, $a_0 \in \mathbb{R}^+$ das Polynom

$$p = X^3 - 3\,X^2 + a_1\,X - a_0 \in \mathbb{R}[X].$$

Für $a_1 = 3$ und $a_0 = 2$ ist

$$p = X^3 - 3\,X^2 + 3\,X - 2 = \left(X^3 - 3\,X^2 + 3\,X - 1\right) - 1 = (X-1)^3 - 1.$$

Die Nullstellen von p über $\mathbb{C}$ sind genau die Lösungen der Polynomgleichung $(z-1)^3 - 1 = 0$, also

$$\begin{aligned} (z-1)^3 - 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (z-1)^3 = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad z - 1 = E(k \cdot 120^\circ) \\ &\Longleftrightarrow \quad z = E(k \cdot 120^\circ) + 1 \end{aligned}$$

mit $k \in \{0, 1, 2\}$. Für $a_1 = 3$ und $a_0 = 1$ ist

$$p = X^3 - 3\,X^2 + 3\,X - 1 = (X-1)^3\,;$$

für diese Wahl der Parameter a_1 und a_0 besitzt p die reelle Nullstelle $a = 1$ mit der Vielfachheit $e = 3$.