MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 12
08.07.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Bearbeitungsvorschlag —

45. a) Wir betrachten die beiden Polynome

$$p = 4\,X^4 + 9\,X^3 + 2\,X^2 \quad \text{und} \quad q = 4\,X^3 + X^2 \in \mathbb{R}[X].$$

- Für $p + q$ erhalten wir

$$p + q = (4\,X^4 + 9\,X^3 + 2\,X^2) + (4\,X^3 + X^2) = 4\,X^4 + 13\,X^3 + 3\,X^2.$$

- Für $p - q$ erhalten wir

$$p - q = (4\,X^4 + 9\,X^3 + 2\,X^2) - (4\,X^3 + X^2) = 4\,X^4 + 5\,X^3 + X^2.$$

- Für $p \cdot q$ erhalten wir

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (4\,X^4 + 9\,X^3 + 2\,X^2) \cdot (4\,X^3 + X^2) = \\ &= 16\,X^7 + 4\,X^6 + 36\,X^6 + 9\,X^5 + 8\,X^5 + 2\,X^4 = \\ &= 16\,X^7 + 40\,X^6 + 17\,X^5 + 2\,X^4. \end{aligned}$$

- Für $p : q$ erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} p : q & = & (4\,X^4 + 9\,X^3 + 2\,X^2) : (4\,X^3 + X^2) = X + 2 \\ & & \underline{-(4\,X^4 + X^3)} \\ & & 8\,X^3 + 2\,X^2 \\ & & \underline{-(8\,X^3 + 2\,X^2)} \\ & & 0 \end{array}$$

b) Das Polynom $p = X^5 + X^4 + 16\,X + 16$ besitzt wegen

$$p(-1) = (-1)^5 + (-1)^4 + 16 \cdot (-1) + 16 = 0$$

die Nullstelle -1, und die Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{l} (X^5 + X^4 + 16\,X + 16) : (X + 1) = X^4 + 16 \\ \underline{-(X^5 + X^4)} \\ 16\,X + 16 \\ \underline{-(16\,X + 16)} \\ 0 \end{array}$$

Ferner besitzt die Polynomgleichung $z^4 + 16 = 0$ wegen

$$\begin{aligned} z^4 = -16 \quad &\Longleftrightarrow \quad z^4 = 16 \cdot E(180°) \\ &\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{16} \cdot E\left(\frac{180°}{4}\right) \cdot E\left(k \cdot \frac{360°}{4}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad z = 2 \cdot E(45°) \cdot E(k \cdot 90°) \end{aligned}$$

mit $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ über $\mathbb{C}$ genau die vier verschiedenen Nullstellen

$$\begin{aligned} z_1 = 2 \cdot E(45°) \cdot E(0°) &= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\right) \cdot 1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i \\ z_2 = 2 \cdot E(45°) \cdot E(90°) &= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\right) \cdot i = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i \\ z_3 = 2 \cdot E(45°) \cdot E(180°) &= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\right) \cdot (-1) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i \\ z_4 = 2 \cdot E(45°) \cdot E(270°) &= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\right) \cdot (-i) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\, i. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} p &= X^5 + X^4 + 16\, X + 16 = \\ &= (X - 1) \cdot \left(X - \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i\right)\right) \cdot \left(X - \left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i\right)\right) \cdot \\ &\qquad \cdot \left(X - \left(-\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i\right)\right) \cdot \left(X - \left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i\right)\right) \end{aligned}$$

die gewünschte Darstellung von p als Produkt in Linearfaktoren.

46. a) Im Polynomring $\mathbb{R}[X]$ erhalten wir

$$\begin{array}{l} (X^3 + X^2) : (X^2 - 1) = X + 1 \quad \text{Rest} \quad X + 1 \\ \underline{-(X^3 - X)} \\ X^2 + X \\ \underline{-(X^2 - 1)} \\ X + 1 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{l} (X^3 - X^2 - 2\, X + 3) : (X - 2) = X^2 + X \quad \text{Rest} \quad 3 \\ \underline{-(X^3 - 2\, X^2)} \\ X^2 - 2\, X + 3 \\ \underline{-(X^2 - 2\, X)} \\ 3 \end{array}$$

b) Für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1} = x + 1 + \frac{x+1}{x^2-1},$$

stellt die Gerade mit der Gleichung $y = x + 1$ eine schräge Asymptote an den Graphen G_f der Funktion f dar; für die Funktion

$$g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2\,x + 3}{x - 2} = x^2 + x + \frac{3}{x-2},$$

stellt die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + x$ eine asymptotische Näherung an den Graphen G_g der Funktion g dar.

47. a) Für das Polynom $p = X^4 - 1$ erhalten wir

$$X^4 - 1 = (X^2 - 1) \cdot (X^2 + 1) = (X - 1) \cdot (X + 1) \cdot (X^2 + 1)$$

als Faktorisierung über $\mathbb{R}$ bzw.

$$X^4 - 1 = (X^2 - 1) \cdot (X^2 + 1) = (X - 1) \cdot (X + 1) \cdot (X - i) \cdot (X + i)$$

als Faktorisierung über $\mathbb{C}$. Ferner besitzt das Polynom $q = X^6 - 1$ über $\mathbb{C}$ genau die sechsten Einheitswurzeln als Nullstellen, also

$$\begin{array}{lclcl@{\qquad}lclcl}
z_1 & = & E(0^\circ) & = & 1, & z_4 & = & E(180^\circ) & = & -1, \\
z_2 & = & E(60^\circ) & = & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i, & z_5 & = & E(240^\circ) & = & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i, \\
z_3 & = & E(120^\circ) & = & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i, & z_6 & = & E(300^\circ) & = & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i,
\end{array}$$

so daß wir über $\mathbb{C}$ die Faktorisierung

$$\begin{aligned}
X^6 - 1 = (X - 1) \cdot (X + 1) \cdot & \\
\cdot \underbrace{\left(X - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)\right) \cdot \left(X - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)\right)}_{= X^2 - X + 1} & \cdot \\
\cdot \underbrace{\left(X - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)\right) \cdot \left(X - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)\right)}_{= X^2 + X + 1} &
\end{aligned}$$

und folglich über $\mathbb{R}$ die Faktorisierung

$$X^6 - 1 = (X - 1) \cdot (X + 1) \cdot \big(X^2 - X + 1\big) \cdot \big(X^2 + X + 1\big)$$

erhalten.

b) Der euklidische Algorithmus ergibt für $p = X^4 + X^3 - X^2 + X + 2$ und $q = X^3 + 2\,X^2 + 2\,X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ als fortgesetzte Division mit Rest

$$\begin{aligned}
X^4 + X^3 - X^2 + X + 2 &= (X - 1) \cdot (X^3 + 2\,X^2 + 2\,X + 1) + \\
&\qquad + \big(-X^2 + 2\,X + 3\big) \\
X^3 + 2\,X^2 + 2\,X + 1 &= (-X - 4) \cdot (-X^2 + 2\,X + 3) + (13\,X + 13) \\
-X^2 + 2\,X + 3 &= \left(-\frac{1}{13}\,X + \frac{3}{13}\right) \cdot (13\,X + 13);
\end{aligned}$$

damit ist $d = 13\,X + 13 \in \mathrm{ggT}(p, q)$.

48. a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit dem Graphen $G_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- Wir zeigen zunächst:

$$\begin{aligned} &G_f \text{ ist achsensymmetrisch zur Geraden } x = x_0 \iff \\ &\iff \text{Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } f(x_0 - x) = f(x_0 + x). \end{aligned}$$

„$\Longrightarrow$“: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x_0 - x, f(x_0 - x)) \in G_f$; da G_f achsensymmetrisch zur Geraden $x = x_0$ ist, folgt daraus $(x_0 + x, f(x_0 - x)) \in G_f$, und es ist $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.
„$\Longleftarrow$“: Für alle $(x_0 - x, y) \in G_f$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $y = f(x_0 - x)$; wegen $f(x_0 - x) = f(x_0 + x)$ folgt $y = f(x_0 + x)$ und damit $(x_0 + x, y) \in G_f$. Folglich ist G_f achsensymmetrisch zur Geraden $x = x_0$.

- Ferner zeigen wir:

$$\begin{aligned} &G_f \text{ ist punktsymmetrisch zum Punkt } (x_0, y_0) \iff \\ &\iff \text{Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } f(x_0 - x) + f(x_0 + x) = 2\,y_0. \end{aligned}$$

„$\Longrightarrow$“: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x_0 - x, f(x_0 - x)) \in G_f$; da G_f punktsymmetrisch zum Punkt (x_0, y_0) ist, folgt daraus $(x_0 + x, y) \in G_f$ mit $f(x_0 - x) + y = 2\,y_0$, es ist also $f(x_0 - x) + f(x_0 + x) = 2\,y_0$.
„$\Longleftarrow$“: Für alle $(x_0 - x, y) \in G_f$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $y = f(x_0 - x)$; wegen $f(x_0 - x) + f(x_0 + x) = 2\,y_0$ folgt $f(x_0 + x) = 2\,y_0 - y$ und damit $(x_0 + x, 2\,y_0 - y) \in G_f$. Damit ist G_f punktsymmetrisch zum Punkt (x_0, y_0).

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt zum einen

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{b}{2\,a} + x\right) &= a \cdot \left(-\frac{b}{2\,a} + x\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2\,a} + x\right) + c \\ &= a \cdot \left(\frac{b^2}{4\,a^2} - 2 \cdot \frac{b}{2\,a} \cdot x + x^2\right) - \frac{b^2}{2\,a} + b \cdot x + c \\ &= \frac{b^2}{4\,a} - b \cdot x + a \cdot x^2 - \frac{b^2}{2\,a} + b \cdot x + c \\ &= a \cdot x^2 + c - \frac{b^2}{4\,a} \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{b}{2\,a} - x\right) &= a \cdot \left(-\frac{b}{2\,a} - x\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2\,a} - x\right) + c \\ &= a \cdot \left(\frac{b^2}{4\,a^2} + 2 \cdot \frac{b}{2\,a} \cdot x + x^2\right) - \frac{b^2}{2\,a} - b \cdot x + c \\ &= \frac{b^2}{4\,a} + b \cdot x + a \cdot x^2 - \frac{b^2}{2\,a} - b \cdot x + c \\ &= a \cdot x^2 + c - \frac{b^2}{4\,a}, \end{aligned}$$

insgesamt also $p\left(-\frac{b}{2\,a} - x\right) = p\left(-\frac{b}{2\,a} + x\right)$; damit ist der Graph G_p der Polynomfunktion p achsensymmetrisch zur Geraden $x = -\frac{b}{2\,a}$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt zum einen

$$\begin{aligned} q\left(-\frac{b}{3\,a}+x\right) &= a\cdot\left(-\frac{b}{3\,a}+x\right)^3+b\cdot\left(-\frac{b}{3\,a}+x\right)^2+\\ &\qquad +c\cdot\left(-\frac{b}{3\,a}+x\right)+d\\ &= a\cdot\left(x^3-3\cdot x^2\cdot\frac{b}{3\,a}+3\cdot x\cdot\frac{b^2}{9\,a^2}-\frac{b^3}{27\,a^3}\right)+\\ &\qquad +b\cdot\left(\frac{b^2}{9\,a^2}-2\cdot\frac{b}{3\,a}\cdot x+x^2\right)-\frac{c\cdot b}{3\,a}+c\cdot x+d\\ &= a\cdot x^3+x\cdot\left(c-\frac{b^2}{3\,a}\right)-\frac{c\cdot b}{3\,a}+\frac{2\,b^3}{27\,a^2}+d \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} q\left(-\frac{b}{3\,a}-x\right) &= a\cdot\left(-\frac{b}{3\,a}-x\right)^3+b\cdot\left(-\frac{b}{3\,a}-x\right)^2+\\ &\qquad +c\cdot\left(-\frac{b}{3\,a}-x\right)+d\\ &= a\cdot\left(-x^3-3\cdot x^2\cdot\frac{b}{3\,a}-3\cdot x\cdot\frac{b^2}{9\,a^2}-\frac{b^3}{27\,a^3}\right)+\\ &\qquad +b\cdot\left(\frac{b^2}{9\,a^2}+2\cdot\frac{b}{3\,a}\cdot x+x^2\right)-\frac{c\cdot b}{3\,a}-c\cdot x+d\\ &= -a\cdot x^3+x\cdot\left(-c+\frac{b^2}{3\,a}\right)-\frac{c\cdot b}{3\,a}+\frac{2\,b^3}{27\,a^2}+d, \end{aligned}$$

zusammen also

$$q\left(-\frac{b}{3\,a}-x\right)+q\left(-\frac{b}{3\,a}+x\right)=4\cdot\frac{b^3}{27\,a^2}-2\cdot\frac{c\cdot b}{3\,a}+2\cdot d$$

mit

$$\begin{aligned} q\left(-\frac{b}{3\,a}\right) &= a\cdot\left(-\frac{b}{3\,a}\right)^3+b\cdot\left(-\frac{b}{3\,a}\right)^2+c\cdot\left(-\frac{b}{3\,a}\right)+d=\\ &= -a\cdot\frac{b^3}{27\,a^3}+b\cdot\frac{b^2}{9\,a^2}-\frac{c\cdot b}{3\,a}+d=2\cdot\frac{b^3}{27\,a^2}-\frac{c\cdot b}{3\,a}+d, \end{aligned}$$

insgesamt also $q\left(-\frac{b}{3\,a}-x\right)+q\left(-\frac{b}{3\,a}+x\right)=2\,q\left(-\frac{b}{3\,a}\right)$; damit ist der Graph G_q der Polynomfunktion q punktsymmetrisch zum Punkt $\left(-\frac{b}{3\,a},q\left(-\frac{b}{3\,a}\right)\right)$.