MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 11
01.07.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II"
— Bearbeitungsvorschlag —

41. a) Für die Polardarstellung einer komplexen Zahl $a + i \cdot b \in \mathbb{C}$ mit dem Realteil $\mathrm{Re}(z) = a$ und dem Imaginärteil $\mathrm{Im}(z) = b$ benötigen wir zum einen den Betrag $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ sowie den Winkel φ, der sich aus der Darstellung $a + i\,b = |z| \cdot (\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ ableiten läßt.

- Die komplexe Zahl $3+3\,i$ besitzt den Realteil $a = 3$ und den Imaginärteil $b = 3$. Wir erhalten mit
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
sowie
$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \underset{\text{1. Quadrant}}{\Longrightarrow} \varphi = 45^\circ$$
die gewünschte Darstellung $3 + 3\,i = |z| \cdot E(\varphi) = 3\sqrt{2} \cdot E(45^\circ)$.
- Die komplexe Zahl $-1 + \sqrt{3}\,i$ besitzt den Realteil $a = -1$ und den Imaginärteil $b = \sqrt{3}$. Wir erhalten mit
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$
sowie
$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\text{2. Quadrant}}{\Longrightarrow} \varphi = 120^\circ$$
die gewünschte Darstellung $-1 + \sqrt{3}\,i = |z| \cdot E(\varphi) = 2 \cdot E(120^\circ)$.
- Die komplexe Zahl -3 besitzt den Realteil $a = -3$ und den Imaginärteil $b = 0$. Wir erhalten mit
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$$
sowie
$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = -1 \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 180^\circ$$
die gewünschte Darstellung $-3 = |z| \cdot E(\varphi) = 3 \cdot E(180^\circ)$.

- Die komplexe Zahl $-\frac{3}{2}\,i$ besitzt den Realteil $a = 0$ und den Imaginärteil $b = -\frac{3}{2}$. Wir erhalten

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

sowie

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = 0 \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = -1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 270^\circ$$

die gewünschte Darstellung $-\frac{3}{2}\,i = |z| \cdot E(\varphi) = \frac{3}{2} \cdot E(270^\circ)$.

b) Für die komplexe Zahl $z = |z| \cdot E(\varphi)$ in Polardarstellung ergibt sich der Realteil $\mathrm{Re}(z) = |z| \cdot \cos\varphi$ und der Imaginärteil $\mathrm{Im}(z) = |z| \cdot \sin\varphi$.

- Wir erhalten für $\varphi = 75^\circ$ zunächst mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos\varphi \; = \; \cos 75^\circ \; &= \; \cos(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \; \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \; \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \; = \; \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \sin\varphi \; = \; \sin 75^\circ \; &= \; \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \; \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \; \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \; = \; \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right); \end{aligned}$$

mit $|z| = \sqrt{3} - 1$ ergibt sich dann wegen

$$\begin{aligned} |z| \cdot \cos\varphi &= \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{18} - 2\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6} \end{aligned}$$

und

$$|z| \cdot \sin\varphi = \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{18} - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

dann die gewünschte Darstellung $\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$.

- Wir erhalten mit Hilfe der bekannten Beziehungen $\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$ und $\sin(180 - \alpha) = \sin\alpha$ für $\varphi = 135^\circ$ schon

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

sowie

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

mit $|z| = \sqrt{8}$ ergibt sich wegen

$$|z| \cdot \cos\varphi = \sqrt{8} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 \quad \text{und} \quad |z| \cdot \sin\varphi = \sqrt{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

dann die gewünschte Darstellung $-2 + 2\,i$.

- Wir erhalten mit Hilfe der bekannten Beziehungen $\cos(360 - \alpha) = \cos\alpha$ und $\sin(360 - \alpha) = -\sin\alpha$ für $\varphi = 300°$ schon

$$\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

sowie

$$\sin 300° = \sin(360° - 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

mit $|z| = \sqrt{3}$ ergibt sich wegen

$$|z| \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad |z| \cdot \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

dann die gewünschte Darstellung $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i$.

42. a) Wegen $1 + i = \sqrt{2} \cdot E(45°)$ erhalten wir

$$(1+i)^5 = \left(\sqrt{2} \cdot E(45°)\right)^5 = \sqrt{2}^5 \cdot E(5 \cdot 45°) = 4\sqrt{2} \cdot E(225°),$$

woraus sich wegen

$$\cos 225° = \cos(180° + 45°) \underset{\text{3. Quadrant}}{=} -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 225° = \sin(180° + 45°) \underset{\text{3. Quadrant}}{=} -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

dann

$$(1+i)^5 = 4\sqrt{2} \cdot \left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -4 - 4\,i$$

ergibt. Ferner erhalten wir wegen

$$1 + \sqrt{3}\,i = 2 \cdot E(60°) \qquad \text{und} \qquad 1 - i = \sqrt{2} \cdot E(315°)$$

zunächst

$$(1 + \sqrt{3}\,i)^3 = \left(2 \cdot E(60°)\right)^3 = 2^3 \cdot E(3 \cdot 60°) = 8 \cdot E(180°) = -8$$

und

$$(1-i)^7 = \left(\sqrt{2} \cdot E(315°)\right)^7 = (\sqrt{2})^7 \cdot E(7 \cdot 315°) = 8\sqrt{2} \cdot E(2205°) =$$

$$\underset{2205° = 6 \cdot 360° + 45°}{=} 8\sqrt{2} \cdot E(45°) = 8\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8 + 8\,i$$

und damit insgesamt

$$(1 + \sqrt{3}\,i)^3 \cdot (1-i)^7 = -8 \cdot (8 + 8\,i) = -64 - 64\,i.$$

b) Die komplexe Zahl $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i$ besitzt den Realteil $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und den Imaginärteil $b = \frac{1}{2}$. Damit erhalten wir mit

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

wegen $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin\varphi = \frac{1}{2}$ schon $\varphi = 30°$ und folglich die Polardarstellung $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i = E(30°)$. Für die 111–te Potenz erhalten wir demnach

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot i\right)^{111} = E(30°)^{111} = E(111 \cdot 30°) = E(3330°),$$

und wegen $\quad 3330° = 9 \cdot 360° + 90° \quad$ ergibt sich $\quad E(3330°) = E(90°) = i$.

43. Die Gleichung $z^3 = 8\,i$ besitzt wegen

$$\begin{aligned} z^3 = 8\,i \quad &\Longleftrightarrow \quad z^3 = 8 \cdot E(90°) \\ &\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[3]{8} \cdot E\left(\frac{90°}{3}\right) \cdot E\left(k \cdot \frac{360°}{3}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad z = 2 \cdot E(30°) \cdot E(k \cdot 120°) \end{aligned}$$

mit $k \in \{0, 1, 2\}$ in $\mathbb{C}$ genau die drei verschiedenen Lösungen

$$z_1 = 2 \cdot E(30°) \cdot E(0°) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) \cdot 1 = \sqrt{3} + i$$

und

$$\begin{aligned} z_2 &= 2 \cdot E(30°) \cdot E(120°) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = \\ &= \left(\sqrt{3} + i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i - \frac{1}{2}\,i - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} + i \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} z_3 &= 2 \cdot E(30°) \cdot E(240°) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = \\ &= \left(\sqrt{3} + i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i - \frac{1}{2}\,i + \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\,i. \end{aligned}$$

Ferner besitzt die Gleichung $z^4 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ wegen

$$\begin{aligned} z^4 = -2 + 2\sqrt{3}\,i \quad &\Longleftrightarrow \quad z^4 = 4 \cdot E(120°) \\ &\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{4} \cdot E\left(\frac{120°}{4}\right) \cdot E\left(k \cdot \frac{360°}{4}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt{2} \cdot E(30°) \cdot E(k \cdot 90°) \end{aligned}$$

mit $k \in \{0,1,2,3\}$ in $\mathbb{C}$ genau die vier verschiedenen Lösungen

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot E(30^\circ) \cdot E(0^\circ) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i \right) \cdot 1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$$

und

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot E(30^\circ) \cdot E(90^\circ) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i \right) \cdot i = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\, i$$

und

$$z_3 = \sqrt{2} \cdot E(30^\circ) \cdot E(180^\circ) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i \right) \cdot (-1) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$$

sowie

$$z_4 = \sqrt{2} \cdot E(30^\circ) \cdot E(270^\circ) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i \right) \cdot (-i) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\, i.$$

44. Für die gegebene komplexe Zahl

$$z = i + \sin 2\alpha - i \cdot \cos 2\alpha = \sin 2\alpha + i \cdot (1 - \cos 2\alpha)$$

erhält man mit den bekannten trigonometrischen Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2\alpha \end{aligned}$$

für den doppelten Winkel sowie $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ den Betrag

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(\sin 2\alpha)^2 + (1 - \cos 2\alpha)^2} \\ &= \sqrt{(2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha)^2 + \big(1 - \big(1 - 2 \cdot \sin^2\alpha\big)\big)^2} \\ &= \sqrt{4 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 4 \cdot \sin^4\alpha} \\ &= \sqrt{4 \cdot \sin^2\alpha \cdot \big(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\big)} \\ &= \sqrt{4 \cdot \sin^2\alpha} = 2 \cdot |\sin\alpha| \underset{0<\alpha<180^\circ}{=} 2 \cdot \sin\alpha. \end{aligned}$$

Für das Argument φ von z ergibt sich damit

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \cdot \sin\alpha} = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \sin\alpha} = \cos\alpha$$

sowie

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2 \cdot \sin\alpha} = \frac{1 - (1 - 2 \cdot \sin^2\alpha)}{2 \cdot \sin\alpha} = \frac{2 \cdot \sin^2\alpha}{2 \cdot \sin\alpha} = \sin\alpha,$$

woraus schon $\varphi = \alpha$ folgt. Damit ergibt sich für die komplexe Zahl z die Polardarstellung

$$z = |z| \cdot E(\varphi) = 2\, \sin\alpha \cdot E(\alpha).$$