MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 10
24.06.2013

# Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“

## — Bearbeitungsvorschlag —

37. a) Wir betrachten die komplexen Zahlen $z = 1 + 2\,i$ und $w = 1 - i$.

- Für $z + w$ erhalten wir
$$z + w = (1 + 2\,i) + (1 - i) = (1 + 1) + (2 + (-1))\,i = 2 + i.$$
- Für $z - w$ erhalten wir
$$z - w = (1 + 2\,i) - (1 - i) = (1 - 1) + (2 - (-1))\,i = 3\,i.$$
- Für $z \cdot w$ erhalten wir
$$z \cdot w = (1 + 2\,i) \cdot (1 - i) = (1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) + (1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1)\,i = 3 + i$$
bzw.
$$\begin{aligned} z \cdot w = (1 + 2\,i) \cdot (1 - i) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-i) + 2\,i \cdot 1 + 2\,i \cdot (-i) = \\ &= 1 + i - 2\,i^2 = 1 + i - 2 \cdot (-1) = 3 + i. \end{aligned}$$
- Für $\frac{z}{w}$ erhalten wir
$$\begin{aligned} \frac{z}{w} = \frac{(1 + 2\,i)}{(1 - i)} = \frac{(1 + 2\,i) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} &= \frac{1 + i + 2\,i + 2\,i^2}{1^2 - i^2} = \\ &= \frac{1 + 3\,i + 2 \cdot (-1)}{1 - (-1)} = \frac{-1 + 3\,i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,i. \end{aligned}$$
- Für $\frac{w}{z}$ erhalten wir
$$\begin{aligned} \frac{w}{z} = \frac{(1 - i)}{(1 + 2\,i)} = \frac{(1 - i) \cdot (1 - 2\,i)}{(1 + 2\,i) \cdot (1 - 2\,i)} &= \frac{1 - 2\,i - i + 2\,i^2}{1^2 - (2\,i)^2} = \\ &= \frac{1 - 3\,i + 2 \cdot (-1)}{1 - (-4)} = \frac{-1 - 3\,i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\,i. \end{aligned}$$

b) Wir bestimmen zuerst die Definitionsmenge der gegebenen Gleichung; dazu betrachten wir den Nenner des linken Bruchterms und erhalten
$$2 + 2 \cdot z - 3\,i \neq 0 \iff 2 \cdot z \neq -2 + 3\,i \iff z \neq -1 + \frac{3}{2}\,i,$$

weswegen sich die Definitionsmenge $D = \mathbb{C} \setminus \left\{-1 + \frac{3}{2}\,i\right\}$ ergibt. Für die Lösungsmenge $L$ gilt dann wegen

$$\begin{aligned}
z \in L \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1 - i + i \cdot z}{2 + 2 \cdot z - 3\,i} = \frac{3+i}{4-i} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(1-i) + i \cdot z}{(2 - 3\,i) + 2 \cdot z} = \frac{3+i}{4-i} \\
&\Longleftrightarrow \quad (4-i) \cdot \big((1-i) + i \cdot z\big) = (3+i) \cdot \big((2 - 3\,i) + 2 \cdot z\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(4 - 5\,i + i^2\big) + \big(4\,i - i^2\big) \cdot z = \big(6 - 7\,i - 3\,i^2\big) + (6 + 2\,i) \cdot z \\
&\Longleftrightarrow \quad (3 - 5\,i) + (4\,i + 1) \cdot z = (9 - 7\,i) + (6 + 2\,i) \cdot z \\
&\Longleftrightarrow \quad (1 + 4\,i) \cdot z - (6 + 2\,i) \cdot z = (9 - 7\,i) - (3 - 5\,i) \\
&\Longleftrightarrow \quad (-5 + 2\,i) \cdot z = 6 - 2\,i \\
&\Longleftrightarrow \quad z = \frac{6 - 2\,i}{-5 + 2\,i} = \frac{(6 - 2\,i) \cdot (-5 - 2\,i)}{(-5 + 2\,i) \cdot (-5 - 2\,i)} = \\
&\qquad\qquad = \frac{-30 - 2\,i + 4\,i^2}{25 - 4\,i^2} = \frac{-34 - 2\,i}{29} = -\frac{34}{29} - \frac{2}{29}\,i
\end{aligned}$$

also $L = \{-\frac{34}{29} - \frac{2}{29}\,i\}$.

38. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ erhalten wir mit Hilfe der Beziehung $z = x + i\,y$

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} &= \frac{x + i\,y + 1}{x + i\,y - 1} = \frac{(x+1) + i\,y}{(x-1) + i\,y} = \frac{(x+1) + i\,y}{(x-1) + i\,y} \cdot \frac{(x-1) - i\,y}{(x-1) - i\,y} = \\
&= \frac{x^2 - x - x \cdot i\,y + x - 1 - i\,y + x \cdot i\,y - i\,y - i^2\,y^2}{(x-1)^2 + y^2} = \\
&= \frac{x^2 - 1 + y^2 - 2\,i\,y}{(x-1)^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x^2 - 1 + y^2}{(x-1)^2 + y^2}}_{= \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} + \underbrace{\frac{-2\,y}{(x-1)^2 + y^2}}_{= \mathrm{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)}\,i.
\end{aligned}$$

- Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \geq 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2 - 1 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \geq 2 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2 - 1 + y^2 \geq 2 \cdot \big((x-1)^2 + y^2)\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2 - 1 + y^2 \geq 2 \cdot \big(x^2 - 2\,x + 1 + y^2\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \geq x^2 - 4\,x + 3 + y^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 1^2 \geq (x-2)^2 + y^2;
\end{aligned}$$

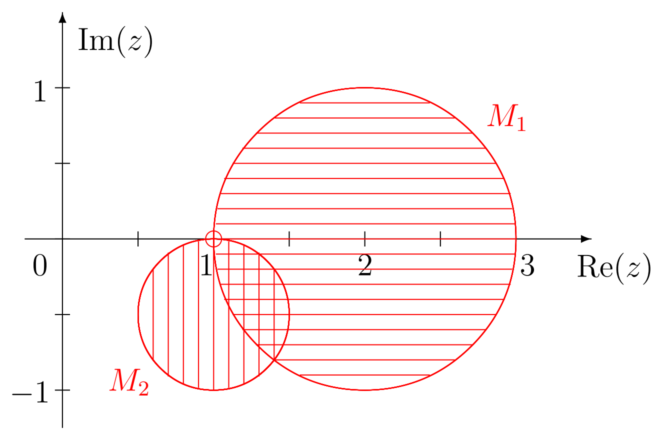
somit beschreibt $M_1$ in der Gaußschen Zahlenebene die Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt $(2, 0)$, allerdings ohne den Randpunkt $(1, 0)$.

- Ferner erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \geq 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{-2\,y}{(x-1)^2+y^2} \geq 2 \\
&\Longleftrightarrow \quad -2\,y \geq 2\cdot\big((x-1)^2+y^2\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad -y \geq (x-1)^2+y^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \geq (x-1)^2+y^2+y \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4} \geq (x-1)^2+\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2;
\end{aligned}$$

  somit beschreibt $M_2$ in der Gaußschen Zahlenebene die Kreisscheibe mit Radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt $(1,-\frac{1}{2})$, allerdings ohne den Randpunkt $(1,0)$.

Damit ergibt sich für die beiden Mengen $M_1$ und $M_2$ die folgende Skizze:




39. a) Die quadratische Gleichung $x^2-4\,x+13=0$ mit den reellen Koeffizienten $a=1$, $b=-4$ und $c=13$ besitzt wegen

$$\Delta = b^2-4\,a\,c = (-4)^2-4\cdot 1\cdot 13 = -36 < 0$$

die beiden konjugiert–komplexen Lösungen

$$\begin{aligned}
x_{1,2} = \frac{-b\pm i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\,a} = \frac{-b\pm i\cdot\sqrt{4\,a\,c-b^2}}{2\,a} = \\
= \frac{-(-4)\pm i\cdot\sqrt{4\cdot 1\cdot 13-(-4)^2}}{2\,1} = \frac{4\pm i\cdot\sqrt{36}}{2} = 2\pm 3\,i;
\end{aligned}$$

damit ergibt sich für den quadratischen Term die Faktorisierung

$$x^2-4\,x+13 = (x-(2+3\,i))\cdot(x-(2-3\,i)).$$

Die quadratische Gleichung $9\,x^2+6\,x+19=0$ mit den reellen Koeffizienten $a=9$, $b=6$ und $c=19$ besitzt wegen

$$\Delta=b^2-4\,a\,c=6^2-4\cdot 9\cdot 19=36-36\cdot 19=-18\cdot 36<0$$

die beiden konjugiert–komplexen Lösungen

$$\begin{aligned} x_{1,2}=\frac{-b\pm i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\,a}=\frac{-b\pm i\cdot\sqrt{4\,a\,c-b^2}}{2\,a}&= \\ \frac{-6\pm i\cdot\sqrt{4\cdot 9\cdot 19-6^2}}{2\,9}=\frac{-6\pm i\cdot\sqrt{18\cdot 36}}{18}&= \\ =\frac{-6\pm i\cdot 18\sqrt{2}}{18}&=-\frac{1}{3}\pm\sqrt{2}\,i; \end{aligned}$$

damit ergibt sich für den quadratischen Term die Faktorisierung

$$9\,x^2+6\,x+19=9\left(x-\left(-\frac{1}{3}+\sqrt{2}\,i\right)\right)\cdot\left(x-\left(-\frac{1}{3}-\sqrt{2}\,i\right)\right).$$

b) Wir führen die Gleichung $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-2=0$ durch die Substitution $u=z+\frac{1}{z}$ in die quadratische Gleichung $u^2+u-2=0$ über; diese besitzt wegen

$$u^2+u-2=0 \iff (u-1)\cdot(u+2)=0 \iff (u=1 \;\text{ oder }\; u=-2)$$

die beiden Lösungen $u=1$ und $u=-2$; durch Resubstitution erhalten wir

$$1=z+\frac{1}{z} \iff z^2-z+1=0 \iff z=\frac{1\pm i\cdot\sqrt{3}}{2}$$

und

$$-2=z+\frac{1}{z} \iff z^2+2\,z+1=0 \iff (z+1)^2=0 \iff z=-1,$$

also die doppelte reelle Lösung $z=-1$ und die beiden konjugiert–komplexen Lösungen $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ und $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$.

40. a) Mit Hilfe der dritten binomischen Formel erhalten wir

$$w=\frac{1+i}{r-i}=\frac{(1+i)\cdot(r+i)}{(r-i)\cdot(r+i)}=\frac{(r-1)+i\cdot(r+1)}{r^2+1}=\underbrace{\frac{r-1}{r^2+1}}_{=\mathrm{Re}(w)}+i\cdot\underbrace{\frac{r+1}{r^2+1}}_{=\mathrm{Im}(w)}.$$

Die komplexe Zahl $w$ ist genau dann reell, wenn der Imaginärteil $\mathrm{Im}(w)=0$ ist, also für $r=-1$; in diesem Fall ist $w=-1$. Die komplexe Zahl $w$ ist genau dann rein imaginär, wenn der Realteil $\mathrm{Re}(w)=0$ ist, also für $r=1$; in diesem Fall ist $w=i$.

b) Mit $z = a + i \cdot b$ erhalten wir über die erste binomische Formel

$$z^2 = (a + i \cdot b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot i + b^2 \cdot i^2 = a^2 - b^2 + i \cdot 2\, a\, b;$$

damit ist

$$\mathrm{Re}(z^2) = 0 \iff a^2 - b^2 = 0 \iff a = \pm b,$$

und folglich beschreibt die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z^2) = 2\}$ in der Gauß-schen Zahlenebene die beiden Winkelhalbierenden $a = b$ und $a = -b$.