MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 9
17.06.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Bearbeitungsvorschlag —

33. a) Für die Elemente der Menge $M_1 = \left\{(-1)^n + \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ erhalten wir:

- für $n \in \mathbb{N}$ gerade ist $(-1)^n + \frac{2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$ und damit $1 \leq 1 + \frac{2}{n} \leq 2$,
- für $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist $(-1)^n + \frac{2}{n} = -1 + \frac{2}{n}$ und damit $-1 \leq -1 + \frac{2}{n} \leq 1$.

Insbesondere gilt also $-1 \leq (-1)^n + \frac{2}{n} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$; folglich ist M_1 (etwa durch -1) nach unten sowie (etwa durch 2) nach oben beschränkt, wobei wegen $2 \in M_1$ schon $\sup M_1 = 2$ ist. Für alle $b \in \mathbb{R}$ mit $-1 < b$ ist $0 < b + 1$, und nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b + 1$; damit ergibt sich

$$(-1)^{2n+1} + \frac{2}{2n+1} = -1 + \frac{2}{2n+1} < -1 + \frac{1}{n} < -1 + (b+1) = b,$$

so daß b keine untere Schranke von M_1 sein kann. Folglich ist -1 die größte untere Schranke von M_1, also $\inf M_1 = -1$.

Wegen $\sup M_1 = 2 \in M_1$ gilt schon $\sup M_1 = \max M_1$; wegen

$$(-1)^n + \frac{2}{n} = \begin{cases} 1 + \frac{2}{n} \neq -1, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -1 + \frac{2}{n} \neq -1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

ist aber $\inf M_1 = -1 \notin M_1$, so daß M_1 kein Minimum besitzt.

b) Für die Elemente der Menge $M_2 = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ erhalten wir:

- für $n \in \mathbb{N}$ gerade ist $1 - \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ und damit $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1$,
- für $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist $1 - \frac{(-1)^n}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ und damit $1 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$.

Insbesondere gilt also $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{(-1)^n}{n} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$; folglich ist M_2 (etwa durch $\frac{1}{2}$) nach unten sowie (etwa durch 2) nach oben beschränkt, wobei wegen $2 = 1 - \frac{(-1)^1}{1} \in M_2$ schon $\sup M_2 = 2 = \max M_2$ und wegen $\frac{1}{2} = 1 - \frac{(-1)^2}{2} \in M_2$ schon $\inf M_2 = \frac{1}{2} = \min M_2$ ist.

34. a) Das Supremum $\sup N$ ist eine obere Schranke von N. Wegen $M \subseteq N$ ist $\sup N$ auch eine obere Schranke von M. Da das Supremum $\sup M$ die kleinste obere Schranke von M ist, folgt schon $\sup M \leq \sup N$.

b) Für jedes $x \in M \cup N$ gilt

- für den Fall $x \in M$ zum einen $x \leq \sup M \leq \max\{\sup M, \sup N\}$,
- für den Fall $x \in N$ zum anderen $x \leq \sup N \leq \max\{\sup M, \sup N\}$,

also stets $x \leq \max\{\sup M, \sup N\}$; damit ist aber $\max\{\sup M, \sup N\}$ eine obere Schranke von $M \cup N$, und da $\sup(M \cup N)$ die kleinste obere Schranke von $M \cup N$ ist, folgt $\sup(M \cup N) \leq \max\{\sup M, \sup N\}$. Für „$\geq$" gilt

- wegen $M \subseteq M \cup N$ gemäß a) zum einen $\sup M \leq \sup(M \cup N)$,
- wegen $N \subseteq M \cup N$ gemäß a) zum anderen $\sup N \leq \sup(M \cup N)$,

insgesamt also $\max\{\sup M, \sup N\} \leq \sup(M \cup N)$.
Folglich ist $M \cup N$ eine nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit

$$\sup(M \cup N) = \max\{\sup M, \sup N\}.$$

35. a) Wir erhalten mit Hilfe der Gaußschen Summenformel in

$$a_n = \frac{2}{n^2-1} \cdot (1+2+3+\ldots+n) = \frac{2}{n^2-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \\ = \frac{2}{n^2-1} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{2}{(n-1) \cdot (n+1)} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n}{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die gewünschte Beziehung.

b) Wir betrachten die Menge

$$M = \{\sqrt{a_n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \geq 2\} = \left\{\sqrt{\frac{n}{n-1}} \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \geq 2\right\};$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$n-1 \leq n \leq 2\,(n-1), \qquad \text{also} \qquad 1 \leq \frac{n}{n-1} \leq 2,$$

so daß sich für die Elemente dieser Menge dann $1 \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \leq \sqrt{2}$ ergibt; folglich ist M (etwa durch 1) nach unten sowie (etwa durch $\sqrt{2}$) nach oben beschränkt, wobei wegen $\sqrt{2} = \sqrt{a_2} \in M$ schon $\sup M = \sqrt{2}$ ist. Für alle $b \in \mathbb{R}$ mit $1 < b$ ist $0 < b-1$, und nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $\frac{1}{n-1} < b-1$; damit ergibt sich

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \underset{a_n \geq 1}{\leq} \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} < 1 + (b-1) = b,$$

so daß b keine untere Schranke von M sein kann. Folglich ist 1 die größte untere Schranke von M, also $\inf M = 1$.
Wegen $\sup M = \sqrt{2} \in M$ gilt schon $\sup M = \max M$; wegen $\sqrt{\frac{n}{n-1}} \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist aber $\inf M = 1 \notin M$, so daß M kein Minimum besitzt.

36. a) Wir zeigen $n^3 \leq 3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Beziehung ist wegen $1^3 = 1 \leq 3 = 3^1$ für $n = 1$ sowie wegen $2^3 = 8 \leq 9 = 3^2$ für $n = 2$ gültig; wir zeigen nun $n^3 \leq 3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

- „$n = 3$": Es ist
$$3^3 = 27 \leq 27 = 3^3.$$
- „$n \to n+1$": Es ist
$$(n+1)^3 = n^3 + \underbrace{3\,n^2}_{\leq n^3} + \underbrace{3\,n+1}_{\leq n^3} \leq 3 \cdot n^3 \leq 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}.$$

Wir betrachten nun die Menge
$$M = \left\{ \sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Mit der obigen Beziehung erhalten wir
$$n^3 \leq 3^n \iff n \leq \sqrt[3]{3^n} \iff \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3 \cdot n]{3^n} \iff \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3};$$
ferner gilt $\sqrt[n]{n} \geq 1$, weswegen insbesondere $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist; folglich ist M (etwa durch 1) nach unten sowie (etwa durch $\sqrt[3]{3}$) nach oben beschränkt, wobei wegen $\sqrt[3]{3} \in M$ schon $\sup M = \sqrt[3]{3} = \max M$ und wegen $\sqrt[1]{1} = 1 \in M$ schon $\inf M = 1 = \min M$ ist.

b) Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ und $m, n \in \mathbb{N}$ erhalten wir
$$\begin{aligned} m \leq n \quad &\iff \quad a^m \leq a^n \\ &\iff \quad \sqrt[n \cdot m]{a^m} \leq \sqrt[n \cdot m]{a^n} \\ &\iff \quad \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[m]{a} \\ &\iff \quad \sqrt[m]{a} \geq \sqrt[n]{a}. \end{aligned}$$

Für $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < 1$ und $m, n \in \mathbb{N}$ erhalten wir wegen
$$\begin{aligned} m \leq n \quad &\iff \quad a^m \geq a^n \\ &\iff \quad \sqrt[n \cdot m]{a^m} \geq \sqrt[n \cdot m]{a^n} \\ &\iff \quad \sqrt[n]{a} \geq \sqrt[m]{a} \\ &\iff \quad \sqrt[m]{a} \leq \sqrt[n]{a} \end{aligned}$$
die Beziehung $\left(m \leq n \iff \sqrt[m]{a} \leq \sqrt[n]{a} \right)$.