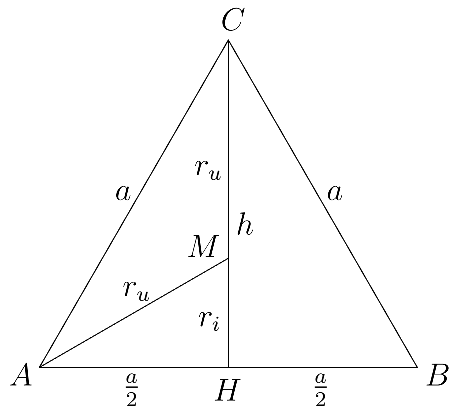
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 8
10.06.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Bearbeitungsvorschlag —

29. Zu betrachten ist ein gleichseitiges Dreieck ΔABC mit der Seitenlänge a:



Da die drei Seiten im Dreieck ΔABC die gleiche Länge haben, ist jede der drei Mittelsenkrechten gleichzeitig auch Höhe und Winkelhalbierende, und die Höhenfußpunkte stimmen mit den Seitenmittelpunkten überein; es bezeichne H den Höhenfußpunkt von C auf der Seite $[AB]$. Ferner ist der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten der Mittelpunkt sowohl des Umkreises als auch des Inkreises des Dreiecks ΔABC.

a) Für die Höhe h des gleichseitigen Dreiecks ΔABC ergibt sich über den Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck ΔCAH

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \iff h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \iff h^2 = \frac{3}{4}\,a^2 \underset{h>0}{\iff} h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$$

und damit für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC

$$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,a = \frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2.$$

b) Für den Umkreisradius r_u des gleichseitigen Dreieck ΔABC ergibt sich über den Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck ΔMAH

$$r_u^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h - r_u)^2 = \frac{1}{4}\,a^2 + \left(h^2 - 2\cdot h\cdot r_u + r_u^2\right),$$

woraus sich

$$2 \cdot h \cdot r_u = \frac{1}{4}\,a^2 + h^2 \underset{\text{a)}}{=} \frac{1}{4}\,a^2 + \frac{3}{4}\,a^2 = a^2$$

und damit

$$r_u = \frac{a^2}{2 \cdot h} \underset{\text{a)}}{=} \frac{a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,a} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a$$

ergibt. Für den Inkreisradius r_i erhält man demnach

$$r_i = h - r_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a - \frac{\sqrt{3}}{3}\,a = \frac{\sqrt{3}}{6}\,a = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,a.$$

c) Im gleichseitigen Dreieck ΔABC stimmen mit den drei Seitenlängen auch die drei Innenwinkel überein und betragen jeweils $60°$. Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck ΔCAH mit der Hypotenuse $[CA]$ der Länge a, wobei der Innenwinkel $\sphericalangle HAC = 60°$ die Gegenkathete $[HC]$ der Länge h und die Ankathete $[AH]$ der Länge $\frac{a}{2}$ besitzt. Damit ergibt sich nach Definition von Sinus und Cosinus

$$\sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,a}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \text{sowie} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$

woraus man dann

$$\sin 30° = \cos\left(90° - 30°\right) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

sowie

$$\cos 30° = \sin\left(90° - 30°\right) = \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

erhält.

30. a) Für das Dreieck ΔABC mit dem Innenwinkel $\alpha = 45°$ und den beiden Seitenlängen $c = \sqrt{6}$ und $a = 2$ erhalten wir mit Hilfe des Sinussatzes

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c} \iff \sin\gamma = \frac{c}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sin 45° = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und damit $\gamma = 60°$ oder $\gamma = 120°$. Im Falle $\gamma < 90°$, also für $\gamma = 60°$ mit $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, erhalten wir dann mit Hilfe des Cosinussatzes für die verbleibende Seitenlänge

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \iff b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma + (a^2 - c^2) = 0,$$

also

$$b^2 - 2 \cdot 2 \cdot b \cdot \frac{1}{2} + \left(2^2 - (\sqrt{6})^2\right) = 0, \quad \text{also} \quad b^2 - 2 \cdot b - 2 = 0,$$

und damit

$$b = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \underset{b>0}{=} 1 + \sqrt{3}.$$

b) Wir betrachten das Dreieck ΔABC mit drei spitzen Innenwinkeln; ferner seien H_A der Höhenfußpunkt von A auf der Seite $[BC]$ sowie H_B der Höhenfußpunkt von B auf der Seite $[AC]$.

- Die beiden Dreiecke ΔBCH_B und ΔCAH_A stimmen zunächst in den beiden Innenwinkeln

$$\sphericalangle CH_AA = 90° = \sphericalangle CH_BB \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACH_A = \gamma = \sphericalangle H_BCB,$$

folglich auch im Innenwinkel $\sphericalangle H_AAC = \sphericalangle CBH_B$ überein; somit sind die beiden Dreiecke ähnlich.

- In den beiden gemäß a) ähnlichen Dreiecken ΔBCH_B und ΔCAH_A stimmt das Verhältnis der Hypotenuse zur Ankathete des Winkels γ überein, es gilt also

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CH_A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CH_B}} \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{AC} \cdot \overline{CH_B} = \overline{BC} \cdot \overline{CH_A}.$$

- Die beiden Dreiecke ΔABC und ΔH_BH_AC stimmen im Innenwinkel $\sphericalangle ACB = \sphericalangle H_BCH_A$ sowie gemäß

$$\overline{AC} \cdot \overline{CH_B} = \overline{BC} \cdot \overline{CH_A} \iff \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CH_A}}{\overline{CH_B}}.$$

im Verhältnis der diesem Winkel anliegenden Seiten überein; somit sind die beiden Dreiecke ähnlich.

31. a) Für das Dreieck ΔABC mit den Seitenlängen a, b, c gilt nach dem Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \iff \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}.$$

b) Wegen $0° < \gamma < 180°$ erhalten wir

$$|\cos\gamma| < 1 \iff -1 < \cos\gamma < 1$$

und damit zusammen mit der Beziehung aus a)

$$-1 < \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} < 1 \iff -2 \cdot a \cdot b < a^2 + b^2 - c^2 < 2 \cdot a \cdot b.$$

c) Mit Hilfe der Beziehung aus b) erhalten wir für die Größenbeziehung zwischen c sowie a und b

$$\begin{aligned}
& -2 \cdot a \cdot b < a^2 + b^2 - c^2 < 2 \cdot a \cdot b \\
\iff\ & -a^2 - 2 \cdot a \cdot b - b^2 < -c^2 < -a^2 + 2 \cdot a \cdot b - b^2 \\
\iff\ & a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 > c^2 > a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\
\iff\ & a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 < c^2 < a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\
\iff\ & (a - b)^2 < c^2 < (a + b)^2 \\
\iff\ & |a - b| < c < |a + b| \\
\iff\ & |a - b| < c < a + b.
\end{aligned}$$

32. a) Wir betrachten in der mit einem kartesischen x–y–Koordinatensystem versehenen Anschauungsebene den Punkt $P = (x, y)$; dabei bezeichne zunächst r seinen Abstand vom Ursprung $O = (0, 0)$ sowie im Falle $(x, y) \neq (0, 0)$ dann α den gerichteten Winkel zwischen der positiven x–Achse und der Halbgeraden $[OP$. Diese schneidet den Einheitskreis um O mit Radius 1 im Punkt $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ und damit den Kreis um O mit Radius r im Punkt $P = (r \cdot \cos\alpha, r \cdot \sin\alpha)$; damit ist also

$$x = r \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin\alpha.$$

Diese Beziehung gilt auch für den Punkt $P = (0, 0)$ mit $r = 0$ und einem beliebigen Winkel α.

b) Wir betrachten einen Punkt $P = (x, y)$ der Anschauungsebene mit den Koordinaten

$$x = r \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin\alpha,$$

der nun um das Drehzentrum $Z = (0, 0)$ mit dem Drehwinkel δ gedreht wird. Für die Koordinaten des Bildpunktes $P' = (x', y')$ erhalten wir

$$x' = r \cdot \cos(\alpha + \delta) \quad \text{und} \quad y' = r \cdot \sin(\alpha + \delta).$$

c) Mit Hilfe der Additionstheoreme erhalten wir

$$\begin{aligned}
x' &= r \cdot \cos(\alpha + \delta) \\
&= r \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\delta - \sin\alpha \cdot \sin\delta) \\
&= \underbrace{r \cdot \cos\alpha}_{=x} \cdot \cos\delta - \underbrace{r \cdot \sin\alpha}_{=y} \cdot \sin\delta \\
&= x \cdot \cos\delta - y \cdot \sin\delta \\
&= \cos\delta \cdot x - \sin\delta \cdot y
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
y' &= r \cdot \sin(\alpha + \delta) \\
&= r \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\delta + \cos\alpha \cdot \sin\delta) \\
&= \underbrace{r \cdot \sin\alpha}_{=y} \cdot \cos\delta + \underbrace{r \cdot \cos\alpha}_{=x} \cdot \sin\delta \\
&= y \cdot \cos\delta + x \cdot \sin\delta \\
&= \sin\delta \cdot x + \cos\delta \cdot y
\end{aligned}$$

und damit die gewünschten Koordinaten

$$x' = \cos\delta \cdot x - \sin\delta \cdot y \quad \text{und} \quad y' = \sin\delta \cdot x + \cos\delta \cdot y$$

des Bildpunktes P'.