MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 7
03.06.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Bearbeitungsvorschlag —

25. a) Für das gegebene Rechteck mit dem Umfang $u = 34$ und dem Umkreisradius $r = 6{,}5$, also der Diagonale $d = 2\,r = 13$, erhalten wir für die beiden Seitenlängen ℓ und b die Beziehungen

$$2\,\ell + \;2\,b = u = 34 \iff \ell + b = 17 \iff b = 17 - \ell$$

sowie über den Satz des Pythagoras

$$\ell^2 + b^2 = d^2 = 13^2 \underset{b=17-\ell}{\iff} \ell^2 + (17-\ell)^2 = 169$$

und somit

$$2\,\ell^2 - 34\,\ell + 120 = 0 \iff \ell^2 - 17\,\ell + 60 = 0 \iff (\ell - 12)\cdot(\ell - 5) = 0;$$

damit ergeben sich für die beiden Seitenlängen $\ell = 12$ und $b = 17 - 12 = 5$ bzw. $\ell = 5$ und $b = 17 - 5 = 12$, also stets der Flächeninhalt $F = \ell \cdot b = 60$.

b) Wir betrachten einen Kreis mit Radius $r = 10$, in dem sich eine Sehne der Länge $s = 16$ befindet. Ferner bezeichne d den Abstand der Sehne zum Mittelpunkt des Kreises. Damit ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse der Länge $r = 10$ und den beiden Katheten der Längen $\frac{s}{2} = 8$ und d. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras ergibt sich

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + d^2 \iff d^2 = r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 \iff d = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6.$$

c) Für das rechtwinklige Dreieck ΔABC erhalten wir die Beziehungen

$$b = q + 2 \quad \text{und} \quad c : q = 5 : 4 \quad \text{bzw.} \quad c = \frac{5}{4}\,q.$$

Im gegebenen rechtwinkligen Dreieck ΔABC gilt nach dem Kathetensatz

$$\begin{aligned} b^2 = c \cdot q \quad &\iff \quad (q+2)^2 = \frac{5}{4}\,q \cdot q \iff q^2 + 4\,q + 4 = \frac{5}{4}\,q^2 \\ &\iff \quad \frac{1}{4}\,q^2 - 4\,q - 4 = 0 \iff q^2 - 16\,q - 16 = 0 \\ &\iff \quad q = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4\cdot 1\cdot(-16)}}{2} \\ &\iff \quad q = \frac{16 \pm \sqrt{64\cdot(4+1)}}{2} \\ &\iff \quad q = 8 \pm 4\,\sqrt{5}; \end{aligned}$$

wegen $q > 0$ ergibt sich also $q = 8 + 4\sqrt{5}$.

26. Wir betrachten ein Rechteck $\square ABCD$ mit den Seitenlängen a und b; von der Ecke B wird das Lot auf die Diagonale $[AC]$ gefällt; dabei bezeichne E den Lotfußpunkt von B auf die Diagonale $[AC]$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\overline{AC}^2 = a^2 + b^2$ bzw. $\overline{AC} = \sqrt{a^2+b^2}$. Die Diagonale $[AC]$ teilt das Rechteck $\square ABCD$ in zwei kongruente Dreiecke ΔABC und ΔACD, weswegen $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot F_{\square ABCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ gilt. Mit Hilfe der Fläche des Dreiecks ΔABC erhalten wir für die Länge der Strecke $[BE]$

$$\begin{aligned} F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BE} \quad &\iff \quad a \cdot b = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \overline{BE} \\ &\iff \quad \overline{BE} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

Ferner gilt im rechtwinkligen Dreieck ΔABE nach dem Satz des Pythagoras $a^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2$; damit erhalten wir für die Länge der Strecke $[AE]$

$$\begin{aligned} \overline{AE} = \sqrt{a^2 - \overline{BE}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2 \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2+b^2}\right)} &= \\ = \sqrt{a^2 \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{a^4}{a^2+b^2}} &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

Für die Flächeninhalte der Dreiecke $F_{\Delta ABE}$ und $F_{\Delta BCE}$ erhalten wir

$$F_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{BE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 \cdot b}{a^2+b^2}$$

sowie

$$\begin{aligned} F_{\Delta BCE} = F_{\Delta ABC} - F_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 \cdot b}{a^2+b^2} &= \\ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a \cdot b \cdot (a^2+b^2) - a^3 \cdot b}{a^2+b^2} \right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot b^3}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Die beiden Flächeninhalte sind wegen

$$\begin{aligned} F_{\Delta ABE} = F_{\Delta BCE} \quad &\iff \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 \cdot b}{a^2+b^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot b^3}{a^2+b^2} \\ &\iff \quad a^3 \cdot b = a \cdot b^3 \underset{a,b \neq 0}{\iff} a^2 = b^2 \underset{a,b > 0}{\iff} a = b. \end{aligned}$$

genau für die Wahl $a = b$ gleich. Damit ist das Rechteck $\square ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge a.

27. Wir geben die exakte Vorschrift für die Konstruktion einer Strecke der Länge $\sqrt{5}$ mit Hilfe des Höhensatzes bzw. des Kathetensatzes bzw. des Satzes des Pythagoras an.

   - Wir wählen die Hypotenuse $[AB]$ mit der Länge 6 und unterteilen diese in die Hypotenusenabschnitte $[AH]$ der Länge $q = 5$ und $[HB]$ der Länge

$p = 1$. Wir errichten über der Hypotenuse $[AB]$ den Thaleskreis und wählen C auf dem Thaleskreis so, damit $[HC]$ die zur Grundseite $[AB]$ gehörende Höhe im recktwinkligen Dreieck ΔABC ist. Folglich gilt im recktwinkligen Dreieck ΔABC für die Höhe $h = \overline{HC}$ nach dem Höhensatz $h^2 = p \cdot q = 1 \cdot 5$ bzw. $h = \sqrt{5}$.

- Wir wählen die Hypotenuse $[AB]$ mit der Länge 5 und unterteilen diese in die Hypotenusenabschnitte $[AH]$ der Länge $q = 1$ und $[HB]$ der Länge $p = 4$. Wir errichten über der Hypotenuse $[AB]$ den Thaleskreis und wählen C auf dem Thaleskreis so, damit $[HC]$ die zur Grundseite $[AB]$ gehörende Höhe im recktwinkligen Dreieck ΔABC ist. Folglich gilt im recktwinkligen Dreieck ΔABC für die Länge b der Kathete $[AC]$ nach dem Kathetensatz $b^2 = c \cdot q = 5 \cdot 1$ bzw. $b = \sqrt{5}$.
- Wir wählen die beiden Katheten $[AC]$ mit der Länge $b = 1$ und $[BC]$ mit der Länge $a = 2$ so, daß im Punkt C ein rechter Winkel vorliegt. Folglich gilt im recktwinkligen Dreieck ΔABC für die Länge c der Hypotenuse $[AB]$ nach dem Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 1^2$ bzw. $c = \sqrt{5}$.

28. a) Um den Flächeninhalt der Sichel des Archimedes zu bestimmen, subtrahieren wir von der Halbkreisfläche über der Hypotenuse mit Radius $\frac{c}{2}$ die beiden anderen Halbkreisflächen über den Hypotenusenabschnitten mit den Radien $\frac{p}{2}$ und $\frac{q}{2}$ und erhalten

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \pi - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \cdot \pi - \left(\frac{q}{2}\right)^2 \cdot \pi \right) = \frac{(p+q)^2 - p^2 - q^2}{8} \cdot \pi =$$
$$= \frac{p^2 + 2 \cdot p \cdot q + q^2 - p^2 - q^2}{8} \cdot \pi = \frac{p \cdot q}{4} \cdot \pi = \frac{h^2}{4} \cdot \pi = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot \pi.$$

Damit besitzt die Sichel des Archimedes denselben Flächeninhalt wie die Kreisfläche mit Radius $\frac{h}{2}$, also mit der Höhe als Durchmesser.

b) Die beiden Möndchen des Hippokrates bilden zusammen mit der Halbkreisfläche über der Hypotenuse mit Radius $\frac{c}{2}$ dieselbe Figur wie die beiden Halbkreisflächen über den Katheten mit den Radien $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$ zusammen mit dem Dreieck ΔABC; damit besitzen die beiden Möndchen zusammen den Flächeninhalt

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi + F_{\Delta ABC} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \pi =$$
$$= \frac{(a^2 + b^2) - c^2}{8} \cdot \pi + F_{\Delta ABC} = \frac{c^2 - c^2}{8} \cdot \pi + F_{\Delta ABC} = F_{\Delta ABC},$$

also denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ΔABC.