MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 6
27.05.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Bearbeitungsvorschlag —

21. a) Für den Flächeninhalt des Quadrats ergibt sich $A_Q = a^2$ sowie für den Flächeninhalt des Rechtecks $A_R = (a+b) \cdot b$. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} A_Q = A_R \quad &\Longleftrightarrow \quad a^2 = (a+b) \cdot b \\ &\Longleftrightarrow \quad a^2 = a \cdot b + b^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad b^2 + a \cdot b - a^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad b = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a^2)}}{2} \\ &\underset{b>0}{\Longleftrightarrow} \quad b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a. \end{aligned}$$

b) Für die gesuchten Streckenverhältnisse erhalten wir zum einen

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

sowie zum anderen

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a}{a} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

beide stimmen gemäß

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

überein. Es handelt sich hierbei um den berühmten „Goldenen Schnitt“, in dem eine Gesamtstrecke der Länge $a+b$ derart in zwei Teilstrecken der Längen a und b geteilt wird, daß das Verhältnis $\frac{a}{b}$ der größeren zur kleineren Teilstrecke genau dem Verhältnis $\frac{a+b}{a}$ der Gesamtstrecke zur größeren Teilstrecke entspricht; dies wird seit der Antike als besonders ästhetisch empfunden.

c) Wären die beiden Strecken a und b kommensurabel, so müßten ihr Quotient

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \in \mathbb{Q}$$

rational sein; damit wäre aber auch $\sqrt{5}+1 \in \mathbb{Q}$ und folglich $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$, was jedoch analog zu $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ nicht der Fall ist. Folglich sind die beiden Strecken a und b nicht kommensurabel.

22. a) Zwei Kreise k und k' sind kongruent, wenn für die beiden Radien $r = r'$ gilt; dies ist durch die Längentreue von Kongruenzabbildungen begründet.

b) Im Falle der Kongruenz der beiden Kreise k und k', gemäß a) also unter der Bedingung $r = r'$, geben wir nun drei verschiedene Kongruenzabbildungen f an, die k auf k' abbilden; dabei genügt es im Hinblick auf die Längentreue, daß f den Mittelpunkt M von k auf den Mittelpunkt M' von k' abbildet. Für den interessanten Fall $M \neq M'$ kann f etwa als

- die Achsenspiegelung an der Mittelsenkrechten zu M und M',
- die Parallelverschiebung um den Vektor von M nach M',
- die Drehung mit dem Mittelpunkt der Strecke $[MM']$ als Drehzentrum und dem Drehwinkel $\delta = 180°$ als Drehwinkel, also die Punktspiegelung am Mittelpunkt der Strecke $[MM']$

gewählt werden; im Spezialfall $M = M'$ leistet etwa

- jede Achsenspiegelung an einer Geraden durch M,
- die identische Abbildung (Parallelverschiebung um den Nullvektor),
- jede Drehung dem Drehzentrum M und einem beliebigen Drehwinkel δ

das Gewünschte.

23. a) Eine Kongruenzabbildung ist eine bijektive Selbstabbildung $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, die sowohl abstandstreu als auch winkeltreu ist. Wir weisen nun die definierenden Eigenschaften einer Gruppe nach:

- Seien $f,\ g \in G$. Die Komposition $f \circ g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ist wiederum eine bijektive Selbstabbildung; ferner gilt für alle $A,\ B \in \mathcal{P}$
$$\overline{f(g(A))\, f(g(B))} = \overline{g(A)\, g(B)} = \overline{AB}$$
sowie für alle $A,\ S,\ B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq S \neq B$
$$\sphericalangle f(g(A))f(g(S))f(g(B)) = \sphericalangle g(A)g(S)g(B) = \sphericalangle ASB;$$
damit ist $f \circ g$ auch längentreu und winkeltreu, es ist also $f \circ g \in G$. Folglich ist G bezüglich $\circ$ abgeschlossen.
- Die Hintereinanderausführung von Abbildungen genügt im allgemeinen dem Assoziativgesetz; damit gilt auch hier $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für alle $f,\ g,\ h \in G$.
- Es ist $\mathrm{id} \in G$, und für alle $f \in G$ gilt $f \circ \mathrm{id} = f = \mathrm{id} \circ f$. Damit ist id das neutrale Element bezüglich $\circ$.
- Für jedes $f \in G$ existiert wegen der Bijektivität von f eine bijektive Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, und es gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id} = f^{-1} \circ f$. Für alle $A,\ B \in \mathcal{P}$
$$\overline{f^{-1}(A)\, f^{-1}(B)} = \overline{f(f^{-1}(A))\, f(f^{-1}(B))} = \overline{AB}$$
sowie für alle $A,\ S,\ B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq S \neq B$
$$\sphericalangle f^{-1}(A)f^{-1}(S)f^{-1}(B) = \sphericalangle f(f^{-1}(A))f(f^{-1}(S))f(f^{-1}(B)) = \sphericalangle ASB;$$
damit ist f^{-1} auch längentreu und winkeltreu, es ist also $f^{-1} \in G$.

b) Wir geben nun für die vier gegebenen Kongruenzabbildungen $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ jeweils die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ an:

- Ist f die Achsenspiegelung an der Geraden a, so ist f^{-1} die Achsenspiegelung an derselben Geraden a; es ist $f^{-1} = f$.
- Ist f die Parallelverschiebung um den Vektor v, so ist f^{-1} die Parallelverschiebung um den entgegengesetzt gleichen Vektor $-v$.
- Ist f die Drehung mit dem Drehzentrum Z und dem Drehwinkel δ, so ist f^{-1} die Drehung mit demselben Drehzentrum Z und dem Drehwinkel $-\delta$ bzw. $360° - \delta$.
- Ist f die Gleitspiegelung bestehend aus der Achsenspiegelung an der Geraden a mit anschließender Verschiebung parallel zu a um den festen Vektor v, so ist f^{-1} die Gleitspiegelung bestehend aus derselben Achsenspiegelung mit anschließender Verschiebung parallel zu a um den festen Vektor $-v$.

24. a) Jeder Punkt, der von den drei Ecken A, B und C gleich weit entfernt ist, liegt auf den Mittelsenkrechten m_{AC} und m_{BC} der Strecken $[AC]$ und $[BC]$, so daß für den zu betrachtenden geometrischen Ort nur deren Schnittpunkt M_U in Frage kommt.

Dieser Punkt M_U hat aber wegen $M_U \in m_{AC}$ von den Ecken A und C sowie wegen $M_U \in m_{BC}$ von den Ecken B und C den gleichen Abstand, und aufgrund der Transitivität hat M_U auch von den Ecken A und B den gleichen Abstand, weswegen M_U auch auf der Mittelsenkrechten m_{AB} der Strecke $[AB]$ liegt.

Damit besteht der geometrische Ort aller Punkte, die von den drei Ecken A, B und C gleich weit entfernt sind, genau aus dem Schnittpunkt M_U der Mittelsenkrechten der drei Dreiecksseiten $[AC]$, $[BC]$ und $[AB]$.

b) Jeder Punkt, der von den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CA]$ gleich weit entfernt ist, liegt auf den Winkelhalbierenden w_α und w_β der gerichteten Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle CBA$, so daß für den zu betrachtenden geometrischen Ort nur deren Schnittpunkt M_I in Frage kommt.

Dieser Punkt M_I hat aber wegen $M_I \in w_\alpha$ von den Strecken $[AB]$ und $[AC]$ sowie wegen $M_I \in w_\beta$ von den Strecken $[BC]$ und $[AB]$ den gleichen Abstand, und aufgrund der Transitivität hat M_I auch von den Strecken $[AC]$ und $[BC]$ den gleichen Abstand, weswegen M_I auch auf der Winkelhalbierenden w_γ des gerichteten Winkels $\sphericalangle ACB$ liegt.

Damit besteht der geometrische Ort aller Punkte, die von den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CA]$ gleich weit entfernt sind, genau aus dem Schnittpunkt M_I der Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel des Dreiecks ΔABC.

c) Die gewünschte Menge aller Punkte beinhaltet den Schnittpunkt M_I aus b) und wird durch

- den Schnittpunkt M_{I_a} der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAC$ mit den beiden Winkelhalbierenden der Außenwinkel von $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle ACB$,

- den Schnittpunkt M_{I_b} der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle CBA$ mit den beiden Winkelhalbierenden der Außenwinkel von $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ACB$,
- den Schnittpunkt M_{I_c} der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ACB$ mit den beiden Winkelhalbierenden der Außenwinkel von $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle CBA$,

komplettiert.

Für die geometrische Bedeutung dieser Örter des Dreiecks ΔABC erhalten wir:

- M_U ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC,
- M_I ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC,
- M_{I_a}, M_{I_b} und M_{I_c} sind die Ankreismittelpunkte des Dreiecks ΔABC.