MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 5
22.05.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Bearbeitungsvorschlag —

17. a) Für das Ereignis

$$A_1 = \text{„Es wird genau dreimal eine 6 gedreht.“}$$

erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$P(A_1) = \binom{20}{3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{17} \approx 19{,}01\ \%.$$

b) Für das Ereignis

$$A_2 = \text{„Es wird mindestens dreimal eine 6 gedreht.“}$$

erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$P(A_2) = \sum_{k=3}^{20} \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{20-k},$$

die sich günstiger über das zu A_2 komplementäre Ereignis

$$\overline{A_2} = \text{„Es wird höchstens zweimal eine 6 gedreht.“}$$

bestimmt wird; wir erhalten damit die Wahrscheinlichkeit

$$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - \left(\binom{20}{0} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{20} + \right.$$
$$\left. + \binom{20}{1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{19} + \binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{18}\right) \approx 32{,}31\ \%.$$

c) Für das Ereignis

$$A_3 = \text{„Es wird beim dritten Versuch die erste 6 gedreht.“}$$

erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$P(A_3) = \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 8{,}10\ \%.$$

d) Für das Ereignis

$$A_4 = \text{„ Es werden mindestens 8 und höchstens 12 ungerade gedreht.“}$$

erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$P(A_4) = \sum_{k=8}^{12} \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20-k} =$$

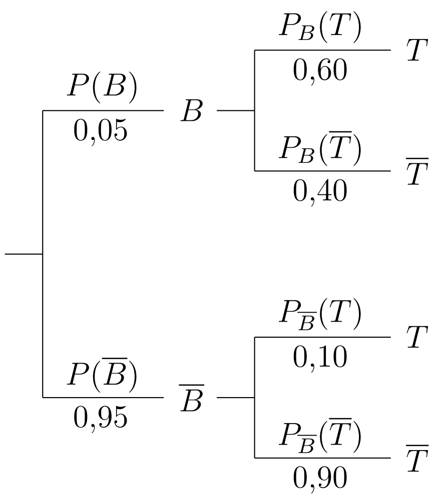
$$= \binom{20}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{20}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \binom{20}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$+ \binom{20}{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \binom{20}{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \approx 73{,}68\ \%.$$

18. Wir betrachten die beiden Ereignisse

$$\begin{aligned} B &: \text{„Das Bild ist gestört.“} \\ T &: \text{„Der Ton ist gestört.“} \end{aligned}$$

und erhalten das folgende Baumdiagramm:



$P(B \cap T) = 0{,}05 \cdot 0{,}60 = 0{,}03$

$P(B \cap \overline{T}) = 0{,}05 \cdot 0{,}40 = 0{,}02$

$P(\overline{B} \cap T) = 0{,}95 \cdot 0{,}10 = 0{,}095$

$P(\overline{B} \cap \overline{T}) = 0{,}95 \cdot 0{,}90 = 0{,}855$

Damit ergibt sich ferner folgende Vierfeldertafel:

	T	$\overline{T}$	
B	0,03	0,02	0,05
$\overline{B}$	0,095	0,855	0,95
	0,125	0,875	1

a) Wegen

$$P(B \cap T) = 0{,}03 \neq 0{,}05 \cdot 0{,}125 = P(B) \cdot P(T)$$

sind die beiden Ereignisse „Bildstörung“ und „Tonstörung“ abhängig.

b) Für die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Tonstörung das Bild einwandfrei ist, ergibt sich

$$P_T(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}095}{0{,}125} = 76{,}0\ \%.$$

c) Wir betrachten nun ferner das Ereignis

$$Z \quad : \quad \text{„Der Zuschauer schaltet ab."}$$

Für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses erhalten wir

$$\begin{aligned} P(Z) &= \underbrace{P(Z \cap B)}_{\leq P(B)} + P(Z \cap \overline{B}) \\ &\leq P(B) + \underbrace{P_{\overline{B}}(Z)}_{\leq 0{,}20} \cdot P(\overline{B}) \\ &\leq 0{,}05 + 0{,}20 \cdot 0{,}95 = 0{,}24 = 24{,}0\ \%. \end{aligned}$$

19. a) Wir betrachten eine Bernoulli–Kette der Länge $n = 12$ mit dem Parameter $p = 0{,}08$. Für das Ereignis

$$A = \text{„Mindestens zwei Bälle sind unbrauchbar."}$$

erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \sum_{k=2}^{12} \binom{12}{k} \cdot 0{,}08^k \cdot 0{,}92^{12-k},$$

die wir wieder günstiger über das zu A komplementäre Ereignis

$$\overline{A} = \text{„Höchstens ein Ball ist unbrauchbar."}$$

bestimmen; wir erhalten damit die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}) \\ &= 1 - \left(\binom{12}{0} \cdot 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^{11} \right) \\ &\approx 24{,}87\ \%. \end{aligned}$$

b) Wir betrachten nun eine Urne mit insgesamt zwölf Kugeln; aus dieser werden genau vier Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Für das Ereignis

$$B = \text{„Höchstens ein Ball ist unbrauchbar."}$$

erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{9}{4} + \binom{3}{1} \cdot \binom{9}{3}}{\binom{12}{4}} \approx 76{,}36\ \%.$$

20. Für die Binomialverteilung mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in]0;1[$ erhalten wir für alle $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ die beiden Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P(\{k\}) &= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ P(\{k+1\}) &= \binom{n}{k+1} \cdot p^{k+1} \cdot (1-p)^{n-(k+1)}; \end{aligned}$$

damit ergibt sich für den Quotienten

$$\begin{aligned} \frac{P(\{k+1\})}{P(\{k\})} &= \frac{\binom{n}{k+1} \cdot p^{k+1} \cdot (1-p)^{n-(k+1)}}{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}} \\ &= \frac{n! \cdot k! \cdot (n-k)! \cdot p}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))! \cdot n! \cdot (1-p)} \\ &= \frac{k! \cdot (n-k)! \cdot p}{(k+1)! \cdot (n-k-1)! \cdot (1-p)} \\ &= \frac{(n-k) \cdot p}{(k+1) \cdot (1-p)} \\ &= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-k}{k+1} \end{aligned}$$

die gewünschte Beziehung. Aus dieser Beziehung folgern wir nun

$$\begin{aligned} P(\{k\}) \leq P(\{k+1\}) &\iff 1 \leq \frac{P(\{k+1\})}{P(\{k\})} \\ &\iff (1-p) \cdot (k+1) \leq p \cdot (n-k) \\ &\iff k + 1 - p \cdot k - p \leq p \cdot n - p \cdot k \\ &\iff k + 1 - p \leq p \cdot n \\ &\iff k \leq p \cdot (n+1) - 1; \end{aligned}$$

die Wahrscheinlichkeiten wachsen also genau für $k \leq p \cdot (n+1) - 1$ an. Zur Bestimmung von denjenigen $k \in \{0,\ldots,n\}$, für welche $P(\{k\})$ maximal wird, ergibt sich demnach die folgende Fallunterscheidung:

- Für $p \cdot (n+1) - 1 \notin \mathbb{N}$ ist $P(\{k\})$ für das nächstgrößere $k \in \mathbb{N}$ maximal.
- Für $p \cdot (n+1) - 1 \in \mathbb{N}$ ist $P(\{k\})$ für $k \in \{p \cdot (n+1) - 1, p \cdot (n+1)\}$ maximal.