MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 4
13.05.2013

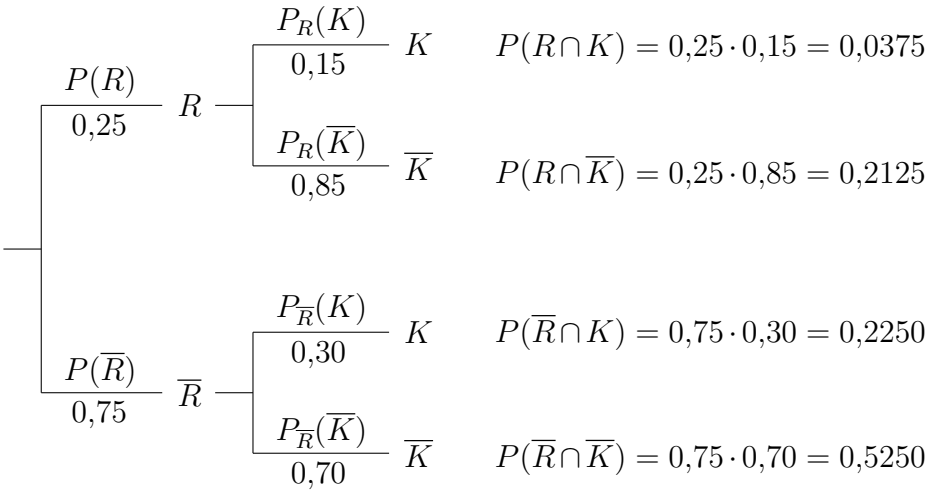
Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“

— Bearbeitungsvorschlag —

13. Für die zufällig ausgewählte Person betrachten wir die Ereignisse

$$\begin{aligned} R &: \text{„Die Person ist Raucher.“} \\ K &: \text{„Die Person ist Kaffeetrinker.“} \end{aligned}$$

und erhalten das folgende Baumdiagramm:



Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß

a) diese Person Kaffeetrinker ist,

$$P(K) = P(R \cap K) + P(\overline{R} \cap K) = 0{,}0375 + 0{,}2250 = 0{,}2625 \approx 26{,}3\ \%.$$

b) diese Person Raucher und zugleich Kaffeetrinker ist,

$$P(R \cap K) = P(R) \cdot P_R(K) = 0{,}0375 \approx 3{,}8\ \%.$$

c) diese Person Raucher ist, wenn sie Kaffee trinkt,

$$P_K(R) = \frac{P(R \cap K)}{P(K)} = \frac{0{,}0375}{0{,}2625} \approx 14{,}3\ \%.$$

d) diese Person Nichtraucher ist, wenn sie keinen Kaffee trinkt,

$$P_{\overline{K}}(\overline{R}) = \frac{P(\overline{R} \cap \overline{K})}{P(\overline{K})} = \frac{0{,}5250}{0{,}7375} \approx 71{,}2\ \%;$$

dabei kann die Wahrscheinlichkeit, daß die Person keinen Kaffee trinkt, über

$$P(\overline{K}) = 1 - P(K) = 1 - 0{,}2625 = 0{,}7375$$

oder über

$$P(\overline{K}) = P(R \cap \overline{K}) + P(\overline{R} \cap \overline{K}) = 0{,}2125 + 0{,}5250 = 0{,}7375$$

berechnet werden.

14. a)

- Wir betrachten zuerst Variante 1; dabei werden aus jeder Mannschaft jeweils zwei der elf Spieler ausgewählt. Um bei der Kontrolle genau zwei Dopingsünder zu ertappen, gibt es zwei Optionen, nämlich zum einen das Ereignis

  A_1 : „Aus jeder Mannschaft wird genau ein Dopingsünder erwischt."

  sowie das Ereignis

  A_2 : „Genau beide Dopingsünder aus Mannschaft B werden erwischt."

  Für diese beiden Ereignisse erhalten wir

  $$P(A_1) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{9}{1}}{\binom{11}{2} \cdot \binom{11}{2}} = \frac{1 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 9}{55 \cdot 55} = \frac{180}{55^2}$$

  sowie

  $$P(A_2) = \frac{\binom{1}{0} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{9}{9}}{\binom{11}{2} \cdot \binom{11}{2}} = \frac{1 \cdot 45 \cdot 1 \cdot 1}{55 \cdot 55} = \frac{45}{55^2};$$

  da sich A_1 und A_2 gegenseitig ausschließen, also unvereinbare Ereignisse sind, ergibt sich für Variante 1 die Wahrscheinlichkeit

  $$P(V_1) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{180 + 45}{55^2} = \frac{9}{121} \approx 7{,}44\ \%.$$

- Wir betrachten nun Variante 2; dabei werden aus den 22 Spielern beider Mannschaften vier Spieler ausgewählt. Dabei werden genau zwei der insgesamt drei Dopingsünder erwischt; damit ergibt sich für Variante 2 die Wahrscheinlichkeit

  $$P(V_2) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{19}{2}}{\binom{22}{4}} = \frac{3 \cdot 171}{7315} = \frac{27}{385} \approx 7{,}01\ \%$$

Wegen $P(V_1) > P(V_2)$ ist die Wahrscheinlichkeit, genau zwei Dopingsünder zu ertappen, bei Variante 1 höher.

b) Bei einer Kontrolle werden genau zwei Dopingsünder ertappt; damit ist das in a) betrachtete Ereignis eingetreten. Gesucht ist nun die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß die beiden ertappten Dopingsünder von der Mannschaft B sind.

- Bei Variante 1 ist diese bedingte Wahrscheinlichkeit, daß die beiden ertappten Dopingsünder von der Mannschaft B sind,

$$\frac{P(A_2)}{P(V_1)} = \frac{\frac{9}{605}}{\frac{9}{121}} = \frac{1}{5} = 20{,}0\ \%.$$

- Bei Variante 2 betrachten wir zusätzlich das Ereignis

  A_3 : „Genau beide Dopingsünder aus Mannschaft B werden erwischt."

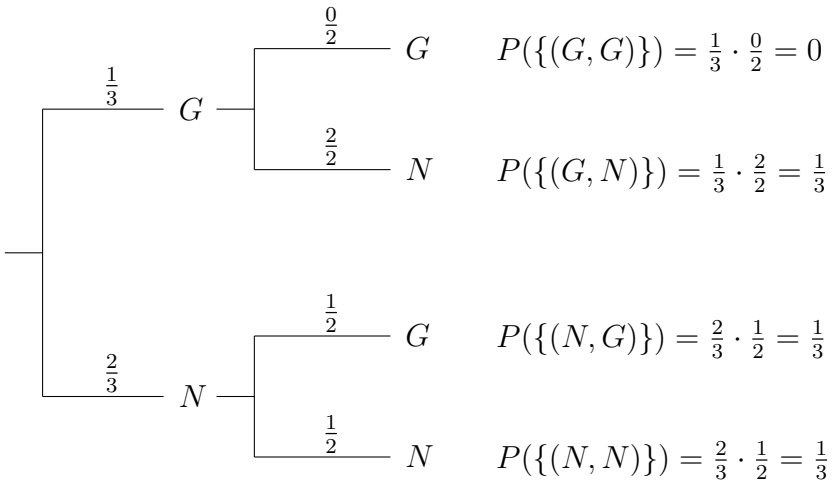
  und erhalten dafür die Wahrscheinlichkeit

$$P(A_3) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{19}{2}}{\binom{22}{4}} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 171}{7315} = \frac{9}{385} \approx 2{,}34\ \%.$$

  Die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß die beiden ertappten Dopingsünder von der Mannschaft B sind, beträgt damit

$$\frac{P(A_3)}{P(V_2)} = \frac{\frac{9}{385}}{\frac{27}{385}} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\ \%.$$

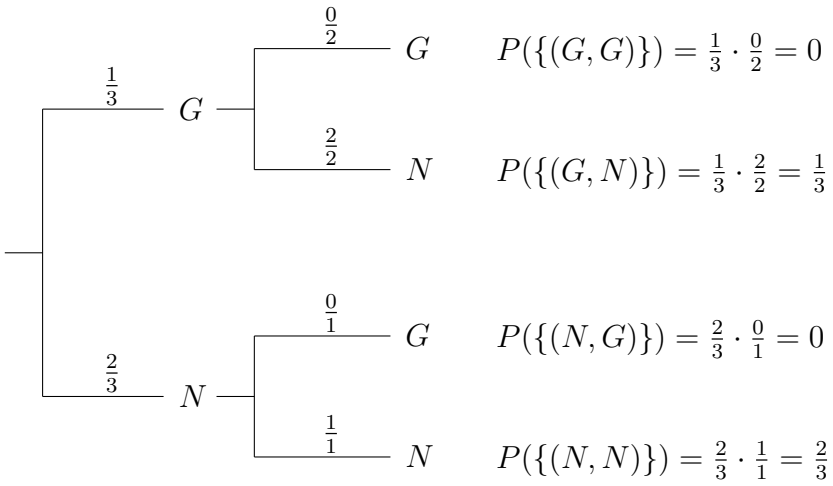
15. a) Verfolgt Kandidat A die Strategie, bei der zuerst gewählten Tür zu bleiben und nicht zur dritten Tür zu wechseln, so ist seine Gewinnwahrscheinlichkeit nur von dieser ersten Wahl abhängig und beträgt demnach $\frac{1}{3}$.
Für die Strategie von Kandidat A, zur dritten Tür zu wechseln, betrachten wir das folgende Baumdiagramm mit „G = Gewinn" und „N = Niete" für Kandidat A in der 1. Stufe bzw. Kandidat B in der 2. Stufe:



Während der erste Pfad unmöglich ist, wechselt beim zweiten Pfad Kandidat A vom Gewinn zu einer Niete, und keiner der Kandidaten erhält den Gewinn. Beim dritten Pfad gewinnt Kandidat B, während Kandidat A von der einen zur anderen Niete wechselt; beim vierten Pfad schließlich wechselt Kandidat A von einer Niete zum Gewinn. Insgesamt bleibt die Gewinnwahrscheinlichkeit von Kandidat A unverändert bei $\frac{1}{3}$.

b) Verfolgt Kandidat A die Strategie, bei der zuerst gewählten Tür zu bleiben und nicht zur dritten Tür zu wechseln, so ist seine Gewinnwahrscheinlichkeit auch bei dieser Variante der Spielshow nur von dieser ersten Wahl abhängig und beträgt demnach $\frac{1}{3}$.

Für die Strategie von Kandidat A, zur dritten Tür zu wechseln, betrachten wir wieder ein Baumdiagramm, wobei die 2. Stufe für die Aktion des Moderators steht:



Da der Moderator auf jeden Fall eine Tür öffnet, die eine Niete verbirgt, ist bei dieser Variante der Spielshow neben dem ersten Pfad auch der dritte Pfad unmöglich. Während nun beim zweiten Pfad Kandidat A vom Gewinn zu einer Niete wechselt, wechselt er beim vierten Pfad von einer Niete zum Gewinn, wodurch sich bei dieser Strategie seine Gewinnwahrscheinlichkeit auf $\frac{2}{3}$ erhöht; er gewinnt nämlich immer dann, wenn er zuerst eine falsche Tür gewählt hat.

c) Nur der Moderator hat die Information darüber, hinter welcher Tür sich der Gewinn verbirgt; diese kommt in der Variante b) der Spielshow beim Öffnen der zweiten Tür mit der Niete zum Ausdruck und kann von Kandidat A zur Steigerung der Gewinnwahrscheinlichkeit ausgenutzt werden, indem er von der zuerst gewählten Tür zur dritten Tür wechselt.

16. a) Jeder Spieler kann unabhängig von den anderen beiden Spielern einen Tip über die Farbe seines Hutes abgeben. Da nur die Farben weiß oder schwarz zur Auswahl stehen, tippt jeder Spieler mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$

richtig, und wir erhalten für die Gewinnwahrscheinlichkeit

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 12{,}5\ \%.$$

b) Gemäß a) stehen einem Spieler zwei Farben zur Verfügung, so daß die Wahrscheinlichkeit für einen richtigen Tip genau $\frac{1}{2}$ beträgt. Wir erhalten für die Strategie, daß nur ein vorbestimmter Spieler einen Tip abgibt, die Gewinnwahrscheinlichkeit

$$p_2 = \frac{1}{2} = 50\ \%.$$

c) Für die Farbkonstellationen der drei Hüte ergeben sich acht gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten, darunter

- zwei Möglichkeiten mit drei gleichfarbigen Hüten sowie
- sechs Möglichkeiten, in den beide Farben vertreten sind;

die Strategie ist nun so zu wählen, daß die Mannschaft in den sechs von acht Fällen, in denen die Spieler nicht nur Hüte einer Farbe aufgesetzt bekommen, durch Abgabe (mindestens) eines richtigen, aber keines falschen Tips, gewinnt:

- sieht ein Spieler bei seinen beiden Mitspielern verschiedene Hutfarben, so muß er sich enthalten,
- sieht ein Spieler hingegen bei seinen Mitspielern zwei gleiche Hutfarben, so muß er sich auf die andere Farbe setzen.

Diese Strategie führt zwar bei den beiden einfarbigen Konstellationen

Hut	W	W	W
Tip	S	S	S

Hut	S	S	S
Tip	W	W	W

zur einer völligen Niederlage, sichert aber in den sechs zweifarbigen Konstellationen

Hut	W	W	S
Tip	—	—	S

Hut	W	S	W
Tip	—	S	—

Hut	S	W	W
Tip	S	—	—

Hut	S	S	W
Tip	—	—	W

Hut	S	W	S
Tip	—	W	—

Hut	W	S	S
Tip	W	—	—

einen knappen Sieg; damit ergibt sich eine Gewinnwahrscheinlichkeit von

$$p_3 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 75\ \%.$$