MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 3
06.05.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Bearbeitungsvorschlag —

9. a) Die Aussage ist wahr: ein Ereignis A ist eine Teilmenge des Ergebnisraumes Ω, also eine Menge von Ergebnissen.
   b) Die Aussage ist falsch: ein Ereignis A ist eine Teilmenge des Ergebnisraumes Ω und damit kein Element des Ergebnisraumes Ω.
   c) Die Aussage ist falsch: der Ereignisraum $\mathcal{A}$ aller möglichen Ereignisse stimmt mit der Potenzmenge $P(\Omega)$ des Ergebnisraumes Ω überein, und damit ist der Ereignisraum $\mathcal{A}$ keine Teilmenge des Ergebnisraumes Ω.
   d) Die Aussage ist falsch: der Ereignisraum $\mathcal{A}$ aller möglichen Ereignisse stimmt mit der Potenzmenge $P(\Omega)$ des Ergebnisraumes Ω überein, und damit ist der Ergebnisraum Ω keine Teilmenge des Ereignisraum $\mathcal{A}$.
   e) Die Aussage ist wahr: es ist $A = \Omega$ das sichere Ereignis, es tritt stets ein.
   f) Die Aussage ist falsch: der Ergebnisraum Ω umfaßt alle möglichen Ergebnisse $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eines Zufallsexperiments und ist damit selbst kein Ergebnis.

10. Wir betrachten eine Urne mit drei roten und vier schwarzen Kugeln; aus dieser werden k Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Dabei kommen für das Ereignis

$$A : \text{„Es werden gleich viele rote wie schwarze Kugeln gezogen.“}$$

nur die geraden Werte von $k \in \{1, \ldots, 7\}$, also $k = 2$, $k = 4$ und $k = 6$, in Frage. Da es sich um ein Zugexperiment ohne Zurücklegen handelt, werden von den insgesamt 7 Kugeln in der Urne genau 2 bzw. 4 bzw. 6 Kugeln entnommen; es liegt jeweils eine hypergeometrische Verteilung vor, und für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A ergibt sich

$$P(A) = \begin{cases} \dfrac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} = \dfrac{4}{7} \approx 57{,}1\ \%, & \text{für } k = 2, \\ \dfrac{\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{7}{4}} = \dfrac{18}{35} \approx 51{,}4\ \%, & \text{für } k = 4, \\ \dfrac{\binom{3}{3} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{7}{6}} = \dfrac{4}{7} \approx 57{,}1\ \%, & \text{für } k = 6. \end{cases}$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß gleich viele rote wie schwarze Kugeln gezogen werden, für $k = 2$ und $k = 6$ am größten.

11. Wir betrachten zunächst den Fall, daß die fünf Buchstaben *mit* Wiederholung ausgewählt werden. Dabei besteht der Ergebnisraum Ω_1 aus allen Quintupeln

$$(b_1, \ldots, b_5) \text{ mit } \textit{beliebigen} \text{ Buchstaben } \; b_1, \ldots, b_5 \in \{\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{Z}\},$$

und damit ist $|\Omega_1| = 26^5$.

- Das zum Ereignis A komplementäre Ereignis $\overline{A}$ besteht aus allen Ergebnissen

$$(b_1, \ldots, b_5) \in \Omega_1 \quad \text{mit} \quad b_1, \ldots, b_5 \in \{\mathrm{B}, \ldots, \mathrm{Z}\};$$

es ist $|\overline{A}| = 25^5$, und damit ergibt sich

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{|\overline{A}|}{|\Omega_1|} = 1 - \frac{25^5}{26^5} \approx 17{,}81\ \%.$$

- Das Ereignis B besteht aus allen Ergebnissen

$$(b_1, \ldots, b_5) \in \Omega_1 \quad \text{mit} \quad b_1, \ldots, b_5 \in \{\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{I}, \mathrm{O}, \mathrm{U}\};$$

es ist $|B| = 5^5$, und damit ergibt sich

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega_1|} = \frac{5^5}{26^5} \approx 2{,}63 \cdot 10^{-2}\ \%.$$

- Das Ereignis C besteht nur aus dem Ergebnis (A,P,R,I,L); es ist $|C| = 1$, und damit ergibt sich

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega_1|} = \frac{1}{26^5} \approx 8{,}42 \cdot 10^{-6}\ \%.$$

Wir betrachten nun den Fall, daß die fünf Buchstaben *ohne* Wiederholung ausgewählt werden. Bei Berücksichtigung der Reihenfolge besteht dabei der Ergebnisraum Ω_1 aus allen Quintupeln

$$(b_1, \ldots, b_5) \;\text{ mit } \textit{paarweise verschiedenen} \text{ Buchstaben } \; b_1, \ldots, b_5 \in \{\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{Z}\},$$

und damit ist $|\Omega_2| = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$.

- Das zum Ereignis A komplementäre Ereignis $\overline{A}$ besteht aus allen Ergebnissen

$$(b_1, \ldots, b_5) \in \Omega_2 \quad \text{mit} \quad b_1, \ldots, b_5 \in \{\mathrm{B}, \ldots, \mathrm{Z}\};$$

es ist $|\overline{A}| = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$, und damit ergibt sich

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{|\overline{A}|}{|\Omega_2|} = 1 - \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22} \approx 19{,}23\ \%.$$

- Das Ereignis B besteht aus allen Ergebnissen

$$(b_1, \ldots, b_5) \in \Omega_2 \quad \text{mit} \quad b_1, \ldots, b_5 \in \{\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{I}, \mathrm{O}, \mathrm{U}\}\,;$$

  es ist $|B| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, und damit ergibt sich

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega_1|} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22} \approx 1{,}52 \cdot 10^{-3}\ \%.$$

- Das Ereignis C besteht nur aus dem Ergebnis (A,P,R,I,L); es ist $|C| = 1$, und damit ergibt sich

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega_1|} = \frac{1}{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22} \approx 1{,}27 \cdot 10^{-5}\ \%.$$

Da es bei den Ereignissen A und B auf die Reihenfolge der Buchstaben nicht ankommt, kann hierfür auch der Ergebnisraum Ω_2' aller fünfelementigen Teilmengen der Menge $\{\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{Z}\}$ gewählt werden, und damit ist $|\Omega_2'| = \binom{26}{5}$.

- Das zum Ereignis A komplementäre Ereignis $\overline{A}$ besteht aus allen fünfelementigen Teilmengen der Menge $\{\mathrm{B}, \ldots, \mathrm{Z}\}$; es ist $|\overline{A}| = \binom{25}{5}$, und damit ergibt sich

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{|\overline{A}|}{|\Omega_2'|} = 1 - \frac{\binom{25}{5}}{\binom{26}{5}} \approx 19{,}23\ \%.$$

- Das Ereignis B besteht nur aus dem Ergebnis $\{\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{I}, \mathrm{O}, \mathrm{U}\}$; es ist $|B| = 1$, und damit ergibt sich

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega_2'|} = \frac{1}{\binom{26}{5}} \approx 1{,}52 \cdot 10^{-3}\ \%.$$

12. a) Für das Zufallsexperiment des zweimaligen Werfens eines Würfels kann als Ergebnisraum

$$\Omega = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

gewählt werden. Für das Ereignis

$$A_k : \text{„Die größte geworfene Augenzahl ist } k.\text{“}$$

mit $k \in \{1, \ldots, 6\}$ als Teilmenge von Ω ergibt sich

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(1,1)\} \\
A_2 &= \{(1,2), (2,1), (2,2)\} \\
A_3 &= \{(1,3), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\} \\
A_4 &= \{(1,4), (2,4), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\} \\
A_5 &= \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\} \\
A_6 &= \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), \\
&\qquad (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}
\end{aligned}$$

und damit die Laplace–Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \\
P(A_2) &= \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \\
P(A_3) &= \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{5}{36} \\
P(A_4) &= \frac{|A_4|}{|\Omega|} = \frac{7}{36} \\
P(A_5) &= \frac{|A_5|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \\
P(A_6) &= \frac{|A_6|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}
\end{aligned}$$

b) Für das Zufallsexperiment des dreimaligen Werfens eines Würfels kann als Ergebnisraum

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

gewählt werden, damit ist $|\Omega| = 6^3$. Für $k \in \{1, \ldots, 6\}$ besteht das Ereignis

$$A_k : \text{„Die größte geworfene Augenzahl ist } k.\text{“}$$

aus den Ergebnissen

$$(a_1, a_2, a_3) \in \Omega \qquad \text{mit} \qquad a_1, a_2, a_3 \in \{1, \ldots, k\}\,,$$

im Falle $k \neq 1$ allerdings ohne die Ergebnisse

$$(a_1, a_2, a_3) \in \Omega \qquad \text{mit} \qquad a_1, a_2, a_3 \in \{1, \ldots, k-1\}\,;$$

damit ergibt sich allgemein

$$|A_k| = k^3 - (k-1)^3, \quad \text{also} \quad P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{k^3 - (k-1)^3}{6^3}.$$

Damit erhalten wir explizit

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= \frac{1^3 - 0^3}{6^3} = \frac{1}{216} \approx 0{,}46\ \% \\
P(A_2) &= \frac{2^3 - 1^3}{6^3} = \frac{7}{216} \approx 3{,}24\ \% \\
P(A_3) &= \frac{3^3 - 2^3}{6^3} = \frac{19}{216} \approx 8{,}80\ \% \\
P(A_4) &= \frac{4^3 - 3^3}{6^3} = \frac{37}{216} \approx 17{,}13\ \% \\
P(A_5) &= \frac{5^3 - 4^3}{6^3} = \frac{61}{216} \approx 28{,}24\ \% \\
P(A_6) &= \frac{6^3 - 5^3}{6^3} = \frac{91}{216} \approx 42{,}13\ \%
\end{aligned}$$