MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 2
29.04.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Bearbeitungsvorschlag —

5. a) Wir erhalten die Primfaktorzerlegungen

$$\begin{aligned} z &= 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \text{und} \\ n &= 1250 = 2 \cdot 5^4. \end{aligned}$$

b) Wir erhalten

$$q = \frac{z}{n} = \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}{2 \cdot 5^4} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{5^3} = 5^{-3} \cdot 2^3 \cdot 3^2.$$

c) Es ergibt sich

$$\begin{array}{llll} \text{für} \quad p = 2 & \text{die Darstellung} \quad q = 2^3 \cdot \frac{9}{125} & \text{mit} & e = 3, \\ \text{für} \quad p = 3 & \text{die Darstellung} \quad q = 3^2 \cdot \frac{8}{125} & \text{mit} & e = 2, \\ \text{für} \quad p = 5 & \text{die Darstellung} \quad q = 5^{-3} \cdot \frac{72}{1} & \text{mit} & e = -3. \end{array}$$

6. Wir betrachen die Menge $\mathbb{Q} = \{z/n \mid z \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$ aller Bruchzahlen z/n mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, auf der durch

$$\begin{aligned} z_1/n_1 + z_2/n_2 &= (z_1 \cdot n_2 + z_2 \cdot n_1)/(n_1 \cdot n_2) \\ z_1/n_1 \cdot z_2/n_2 &= (z_1 \cdot z_2)/(n_1 \cdot n_2) \end{aligned}$$

eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ wohldefiniert sind.

- Für alle z_1/n_1, z_2/n_2, $z_3/n_3 \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\begin{aligned} (z_1/n_1 + z_2/n_2) + z_3/n_3 &= (z_1 \cdot n_2 + z_2 \cdot n_1)/(n_1 \cdot n_2) + z_3/n_3 = \\ &= \big((z_1 \cdot n_2 + z_2 \cdot n_1) \cdot n_3 + z_3 \cdot (n_1 \cdot n_2)\big)/\big((n_1 \cdot n_2) \cdot n_3\big) = \\ &= (z_1 \cdot n_2 \cdot n_3 + z_2 \cdot n_1 \cdot n_3 + z_3 \cdot n_1 \cdot n_2) \,/\, (n_1 \cdot n_2 \cdot n_3) = \\ &= (z_1 \cdot (n_2 \cdot n_3) + (z_2 \cdot n_3 + z_3 \cdot n_2) \cdot n_1) \,/\, (n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)) = \\ &= z_1/n_1 + (z_2 \cdot n_3 + z_3 \cdot n_2)/(n_2 \cdot n_3) = z_1/n_1 + (z_2/n_2 + z_3/n_3)\,; \end{aligned}$$

damit ist das Assoziativgesetz der Addition $+$ gezeigt.

- Für alle $z_1/n_1,\ z_2/n_2,\ z_3/n_3 \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\begin{aligned}(z_1/n_1 \cdot z_2/n_2) \cdot z_3/n_3 &= (z_1 \cdot z_2)/(n_1 \cdot n_2) \cdot z_3/n_3 = \\ &= \big((z_1 \cdot z_2) \cdot z_3\big)/\big((n_1 \cdot n_2) \cdot n_3\big) = \big(z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)\big)/\big(n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)\big) = \\ &= z_1/n_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)/(n_2 \cdot n_3) = z_1/n_1 \cdot (z_2/n_2 \cdot z_3/n_3)\,;\end{aligned}$$

  damit ist das Assoziativgesetz der Multiplikation $\cdot$ gezeigt.

7. In der Anschauungsebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ betrachten wir den Einheitskreis

$$K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\big\}$$

sowie die Gerade

$$G_m = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = m \cdot x + m\}\,;$$

dabei ist $m \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

a) Für einen Punkt $P = (x,y) \in G_m$, also mit $y = m \cdot x + m$, ergibt sich

$$\begin{aligned} P \in K \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 + (m \cdot x + m)^2 = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 + \big(m^2 \cdot x^2 + 2 \cdot m^2 \cdot x + m^2\big) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad (1 + m^2) \cdot x^2 + 2 \cdot m^2 \cdot x + (m^2 - 1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-2 \cdot m^2 \pm \sqrt{(2 \cdot m^2)^2 - 4 \cdot (1 + m^2) \cdot (m^2 - 1)}}{2 \cdot (1 + m^2)} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-2 \cdot m^2 \pm \sqrt{4 \cdot m^4 - 4 \cdot (m^4 - 1)}}{2 \cdot (1 + m^2)} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-2 \cdot m^2 \pm 2}{2 \cdot (1 + m^2)} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{oder} \quad x = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}. \end{aligned}$$

Für die y–Koordinaten der Schnittpunkte ergibt sich

$$y = m \cdot x + m = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad x = -1, \\ \dfrac{2 \cdot m}{1 + m^2}, & \text{für} \quad x = \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2}; \end{cases}$$

Damit erhalten wir die beiden Schnittpunkte $(-1, 0)$ sowie

$$P_m = (x_m, y_m) \qquad \text{mit} \qquad x_m = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} \quad \text{und} \quad y_m = \frac{2 \cdot m}{1 + m^2}.$$

b) Wir zeigen die Gültigkeit der Beziehung $m \in \mathbb{Q} \iff P_m \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; dabei verwenden wir, daß $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper, insbesondere also abgeschlossen bezüglich Addition und Subtraktion sowie Multiplikation und Division ist.

- Für „$\Longrightarrow$“ sei $m \in \mathbb{Q}$. Dann ist auch $2 \cdot m$ und $m^2 \in \mathbb{Q}$, so daß man
$$x_m = \frac{1-m^2}{1+m^2} \in \mathbb{Q} \qquad \text{und} \qquad y_m = \frac{2 \cdot m}{1+m^2} \in \mathbb{Q}$$
erhält, also $P_m = (x_m, y_m) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
- Für „$\Longleftarrow$“ sei $P_m \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Damit gilt
$$x_m = \frac{1-m^2}{1+m^2} = -1 + \frac{2}{1+m^2} \in \mathbb{Q}, \quad \text{also} \quad \frac{2}{1+m^2} \in \mathbb{Q},$$
sowie
$$y_m = \frac{2 \cdot m}{1+m^2} \in \mathbb{Q} \quad \text{und damit} \quad m = \frac{\frac{2 \cdot m}{1+m^2}}{\frac{2}{1+m^2}} \in \mathbb{Q}.$$

8. a) Wir weisen anhand der Definition nach, daß die Relation
$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \right\}$$
eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen ist. Für alle x, y, $z \in \mathbb{R}^+$ gilt:
   - Es ist $\frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{Q}$, also $(x,x) \in R$; damit ist R reflexiv.
   - Aus $(x,y) \in R$, also $\frac{x}{y} = q \in \mathbb{Q}$, folgt $\frac{y}{x} = \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$, also $(y,x) \in R$; damit ist R symmetrisch.
   - Aus $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$, also $\frac{x}{y} = q_1 \in \mathbb{Q}$ und $\frac{y}{z} = q_2 \in \mathbb{Q}$, folgt $\frac{x}{z} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = q_1 \cdot q_2 \in \mathbb{Q}$, also ist $(x,z) \in R$; damit ist R transitiv.

   Insgesamt ist also R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^+$.

   b) Es ist zu überprüfen, welche der beiden Verknüpfungen
$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \qquad \text{und} \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}.$$
mit Äquivalenzklassen $\overline{a}$ und $\overline{b}$ bezüglich R wohldefiniert ist; hierfür darf die Definition nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängen.
   - Für $a_1 = 2$ und $a_2 = 1$ gilt $\dfrac{a_1}{a_2} = 2 \in \mathbb{Q}$, also $\overline{a_1} = \overline{a_2}$; mit $b = \sqrt{2}$ gilt
$$\frac{a_1 + b}{a_2 + b} = \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q},$$
also $\overline{a_1 + b} \neq \overline{a_2 + b}$. Wegen $\overline{a_1} + \overline{b} \neq \overline{a_2} + \overline{b}$ ist $+$ nicht wohldefiniert.
   - Für $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ und $\overline{b_1} = \overline{b_2}$ gilt $(a_1, a_2) \in R$, also $\frac{a_1}{a_2} = q_1 \in \mathbb{Q}$, und $(b_1, b_2) \in R$, also $\frac{b_1}{b_2} = q_2 \in \mathbb{Q}$, woraus sich
$$\frac{a_1 \cdot b_1}{a_2 \cdot b_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = q_1 \cdot q_2 \in \mathbb{Q},$$
also $\overline{a_1 \cdot b_1} = \overline{a_2 \cdot b_2}$, ergibt. Wegen $\overline{a_1} \cdot \overline{b_1} = \overline{a_2} \cdot \overline{b_2}$ ist $\cdot$ wohldefiniert.