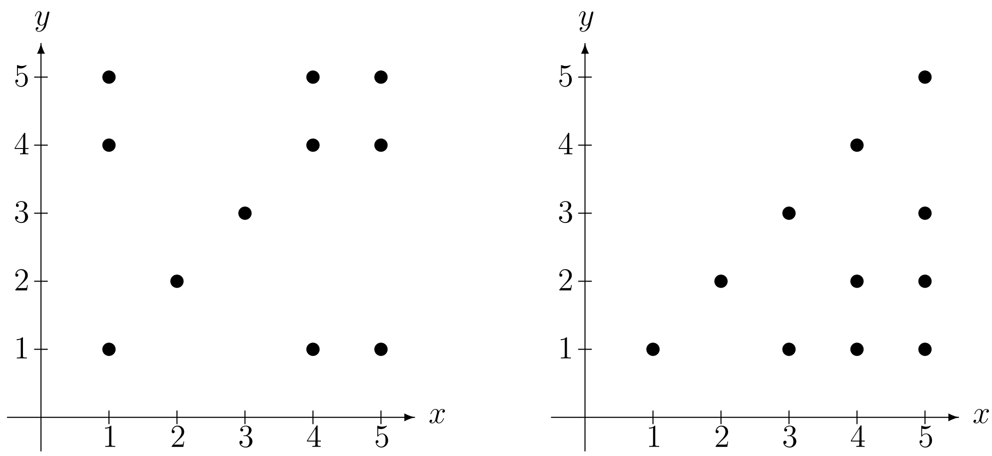
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 1
22.04.2013

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. a) Die gegebenen Relationen lassen sich graphisch wie folgt darstellen (linkes Bild für R_1, rechtes Bild für R_2):



b) Durch Überprüfung anhand der elementweise gegebenen Relation R_1 erkennt man:

Reflexivität: Für alle $x \in M$ gilt $(x, x) \in R_1$.

Symmetrie: Für alle x, $y \in M$ mit $(x, y) \in R_1$ gilt auch $(y, x) \in R_1$; so ist etwa mit $(1, 4) \in R_1$ auch $(4, 1) \in R_1$, usw.

Transitivität: Für alle x, y, $z \in M$ mit $(x, y) \in R_1$ und $(y, z) \in R_1$ gilt auch $(x, z) \in R_1$; so ist etwa mit $(1, 4) \in R_1$ und $(4, 5) \in R_1$ auch $(1, 5) \in R_1$, usw.

Folglich stellt R_1 eine Äquivalenzrelation auf M dar.

Für die Äquivalenzklassen bezüglich R_1 gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{1} &= \{y \in M \mid (1, y) \in R_1\} = \{1, 4, 5\} \\
\overline{2} &= \{y \in M \mid (2, y) \in R_1\} = \{2\} \\
\overline{3} &= \{y \in M \mid (3, y) \in R_1\} = \{3\} \\
\overline{4} &= \{y \in M \mid (4, y) \in R_1\} = \{1, 4, 5\} \\
\overline{5} &= \{y \in M \mid (5, y) \in R_1\} = \{1, 4, 5\}
\end{aligned}$$

c) Durch Überprüfung anhand der elementweise gegebenen Relation R_2 erkennt man:

Reflexivität: Für alle $x \in M$ gilt $(x, x) \in R_2$.

Antisymmetrie: Für alle $x, y \in M$ mit $(x, y) \in R_2$ und $(y, x) \in R_2$ gilt schon $x = y$.

Transitivität: Für alle $x, y, z \in M$ mit $(x, y) \in R_2$ und $(y, z) \in R_2$ gilt auch $(x, z) \in R_2$.

Folglich stellt R_2 eine Ordnung auf M dar.

Für $x = 1$ und $y = 2$ gilt $(x, y) \notin R_2$ und $(y, x) \notin R_2$; damit ist R_2 keine totale Ordnung auf M.

2. a) Die Relation $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = 2\,y\}$ ist nicht Graph einer Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, denn zum Element $x = 1 \in \mathbb{N}$ gibt es kein Element $y \in \mathbb{N}$ mit $(1, y) \in R_1$.

   b) Die Relation $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2\,x = y\}$ ist hingegen Graph einer Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, denn zu jedem Element $x \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{N}$ mit $(x, y) \in R_2$, nämlich $y = 2\,x$.

3. Wir betrachten die drei zweibuchstabigen Wörter `du`, `er` und `es`. Im Lexikon steht `du` vor `er` und `es`, da der erste Buchstabe `d` des Wortes `du` im Alphabet vor dem ersten Buchstaben `e` der Wörter `er` und `es` kommt; ferner steht `er` vor `es`, da bei gleichem ersten Buchstaben `e` der zweite Buchstabe `r` des Wortes `er` im Alphabet vor dem zweiten Buchstaben `s` des Wortes `es` kommt.

   Dieses (lexikographische) Ordnungsprinzip wird nun auf der Menge $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ der Paare natürlicher Zahlen durch

$$(x, y) \leq_{\text{lex}} (x', y') :\iff x < x' \text{ oder } (x = x' \text{ und } y \leq y')$$

   bzw. in der Relationsschreibweise

$$R = \{((x, y), (x', y')) \in M \times M \mid x < x' \text{ oder } (x = x' \text{ und } y \leq y')\}$$

   verwirklicht.

   Wir weisen nach, daß $\leq_{\text{lex}}$ bzw. R eine totale Ordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ darstellt; seien dazu (x, y), (x', y') und $(x'', y'') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

   - Reflexivität: Es ist $x = x$ und $y \leq y$, also $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x, y)$.
   - Antisymmetrie: Seien $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x', y')$ und $(x', y') \leq_{\text{lex}} (x, y)$. Aus der Widerspruchsannahme $x \neq x'$ folgt dann $x < x'$ (wegen $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x', y')$) sowie $x' < x$ (wegen $(x', y') \leq_{\text{lex}} (x, y)$), ein Widerspruch. Demnach gilt $x = x'$ und folglich $y \leq y'$ (wegen $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x', y')$) und $y' \leq y$ (wegen $(x', y') \leq_{\text{lex}} (x, y)$), zusammen also $y = y'$; es ist also $(x, y) = (x', y')$.
   - Transitivität: Seien $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x', y')$ und $(x', y') \leq_{\text{lex}} (x'', y'')$.

     Fall 1: $x < x'$. Wegen $x' \leq x''$ (wegen $(x', y') \leq_{\text{lex}} (x'', y'')$) ist $x < x''$ und damit $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x'', y'')$.

Fall 2: $x' < x''$. Wegen $x \leq x'$ (wegen $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x', y')$) ist $x < x''$ und damit $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x'', y'')$.
Fall 3: ($x = x'$ und $(y \leq y')$) und ($x' = x''$ und $(y' \leq y'')$). Damit ist $x = x''$ und $y \leq y''$ und damit $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x'', y'')$.

- Vergleichbarkeit von (x, y) und (x', y'):
  Fall 1: $x < x'$. Damit ist $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x', y')$.
  Fall 2: $x > x'$. Damit ist $x' < x$, also $(x', y') \leq_{\text{lex}} (x, y)$.
  Fall 3: $x = x'$. Im Falle $y \leq y'$ ist $(x, y) \leq_{\text{lex}} (x', y')$, und im Falle $y > y'$ ist $y' < y$, also $(x', y') \leq_{\text{lex}} (x, y)$.

4. a) Für alle x, y, $z \in \mathbb{R}^+$ gilt:
   - $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$, also $(x, x) \in R$. Damit ist R reflexiv.
   - Sei $(x, y) \in R$. Damit gilt $x - y \in \mathbb{Z}$ und folglich $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$, also ist $(y, x) \in R$. Damit ist R symmetrisch.
   - Seien $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$. Damit gilt $x - y \in \mathbb{Z}$ und $y - z \in \mathbb{Z}$ und folglich $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z}$, also ist $(x, z) \in R$. Damit ist R transitiv.

   b) Es ist $\overline{1} = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid (1, y) \in R\} = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid 1 - y \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ sowie $\overline{0{,}25} = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid (0{,}25,\ y) \in R\} = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid 0{,}25 - y \in \mathbb{Z}\} = \{0{,}25,\ 1{,}25,\ 2{,}25, \ldots\} = \{0{,}25 + n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

   c) Es ist $\overline{7{,}2} = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid (7{,}2,\ y) \in R\} = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid 7{,}2 - y \in \mathbb{Z}\} = \{0{,}2,\ 1{,}2,\ 2{,}2, \ldots\} = \{0{,}2 + n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Damit ist 0,2 der kleinste Repräsentant der Äquivalenzklasse $\overline{7{,}2}$.