MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 12
08.07.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“

45. a) Für die beiden Polynome
$$p = 2\,X^4 + 4\,X^3 + 3\,X^2 + 6\,X \quad \text{und} \quad q = 2\,X^3 + 3\,X \in \mathbb{R}[X]$$
bestimme man $p+q$, $p-q$, $p \cdot q$ und $p : q$.

    b) Man führe im Polynomring $\mathbb{R}[X]$ für die beiden Polynome
$$p = X^3 - 3\,X^2 + 5\,X - 3 \quad \text{und} \quad q = X^3 - 1$$
den euklidischen Algorithmus als fortgesetzte Polynomdivision mit Rest durch und bestimme so einen größten gemeinsamen Teiler von p und q.

46. Im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ bestimme man alle komplexen Nullstellen der Polynome
$$\begin{aligned} p &= X^5 - 3\,X^4 + 8\,X^3 - 14\,X^2 + 16\,X - 8 \quad \text{und} \\ q &= X^n + X^{n-1} + \ldots + X^2 + X + 1 \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

47. Sei $(K[X], +, \cdot)$ der Polynomring über dem Körper $(K, +, \cdot)$ sowie p, $q \in K[X]$ mit $q \neq 0$; dann gibt es eindeutig bestimmte r, $s \in K[X]$ mit
$$p = s \cdot q + r \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(q).$$
Man zeige diese Aussage mit Hilfe vollständiger Induktion nach $n = \mathrm{Grad}(p)$.

48. Man betrachte den Polynomring $K[X]$ über dem Körper $(K, +, \cdot)$ sowie für das Polynom $p = a_n\,X^n + a_{n-1}\,X^{n-1} + \ldots + a_1\,X + a_0 \in K[X]$ die Polynomabbildung
$$f_p : K \to K, \quad f_p(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0;$$
es bezeichne $\mathrm{Abb}(K, K)$ die Menge aller Selbstabbildungen $f : K \to K$ von K.

    a) Für die Abbildung
$$g : K[X] \to \mathrm{Abb}(K, K), \quad p \mapsto f_p$$
zeige man, daß
$$f_{p+q} = f_p + f_q, \quad f_{p \cdot q} = f_p \cdot f_q, \quad f_1 = 1$$
für alle p, $q \in K[X]$ gilt.

    b) Man zeige, daß g injektiv, aber nicht surjektiv ist, wenn K unendlich viele Elemente besitzt.

    c) Man zeige, daß g surjektiv, aber nicht injektiv ist, wenn K nur endlich viele Elemente besitzt.

Abgabe bis Montag, den 15. Juli 2013, 14^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).