MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2013
Blatt 10
24.06.2013

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“

37. a) Man bestimme in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 2\,x + a = 0$$

und gebe in den jeweiligen Fällen eine Faktorisierung des quadratischen Terms an.

b) Man bestimme alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$\left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{z^2+1}{z+1}\right) + 8 = 0 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}.$$

38. Man skizziere die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene:

a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < 2\}$.

b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - 1| < 3\}$.

c) $M_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}\right\}$.

d) $M_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z^2) > 2\}$.

39. a) Man zeige für alle komplexen Zahlen z und w die Beziehung

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2 \cdot \left(|z|^2 + |w|^2\right) \qquad \textit{(Parallelogrammgleichung)}$$

und interpretiere das Ergebnis geometrisch in der Gaußschen Zahlenebene.

b) Es seien u und w zwei verschiedene komplexe Zahlen. Für welche komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist $|u - z|^2 + |w - z|^2$ minimal?

40. a) Man betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{|z|}{z} + \frac{|z|}{\overline{z}}.$$

Man bestimme die Wertemenge von f.

b) Man zeige für alle komplexen Zahlen z und w die Beziehung

$$\left|\frac{z - w}{1 - \overline{w}\,z}\right| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \big(|w| = 1 \;\text{ oder }\; |z| = 1\big).$$

Abgabe bis Montag, den 1. Juli 2013, 14^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).